Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ ein graduierter Ring, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset S$ zwei homogene Ideale. Verifizieren Sie, dass die Ideale

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$$

ebenfalls homogen sind.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Veronese-Abbildung in der Form

$$\nu : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^2 + x_1^2 : x_0^2 - x_1^2 : 2x_0x_1).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung über die offenen Teilmenge $D_+(T_0) = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ faktorisiert, und Ihr Bild mit dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, $X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^n(k)$ die Hyperebene zu einem homogenen Polynom $f(T_0, \ldots, T_n)$ vom Grad $d \geq 1$, und $U \subset k^{n+1}$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum. Angenommen, die entsprechende projektive Gerade

$$L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n(k)$$

ist nicht in der Hyperebene X enthalten. Zeigen Sie, dass $X \cap L$ höchstens $d = \deg(f)$ Punkte enthält.

Aufgabe 4. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass es Ideale $I \subset \mathbb{R}[T_1, T_2]$ gibt, deren Homogenisierung $J \subset \mathbb{R}[T_0, T_1, T_2]$ die Eigenschaft

$$\overline{V(I)} \neq V_+(J)$$

hat, wobei der Abschluss auf der linken Seite in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gebildet wird. Tipp: Betrachten Sie das reelle Polynom $f = T_1^2 + T_2^4$. Wieso ist diese Ungleichheit kein Widerspruch zur Proposition 5.6 der Vorlesung?

Abgabe: Bis Freitag, den 25. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.