Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei k ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$. Wir betrachten die Kubik $X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^3(k)$, welche durch das homogene Polynom

$$f = T_0^3 - T_1T_2T_3$$

definiert wird. Bestimmen Sie den nicht-glatten Ort $X' \subset X$. Beachten Sie dabei auch den Spezialfall $p = 3$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper von Charakteristik $p = 2$, und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die beiden Quadriken

$$X = V_+(T_0^2 + \ldots + T_n^2) \quad \text{und} \quad Y = V_+(T_0T_1 + T_2^2 + \ldots + T_n^2)$$

im $\mathbb{P}^n(k)$ nicht projektiv äquivalent sind. Benutzen Sie dafür die nicht-glatten Orte $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Abbildungen

$$\nu : \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^2(k), \quad x \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$$

und

$$\sigma : \mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^3(k), \quad (x, y) \longmapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1),$$

wobei $x = (x_0 : x_1)$ und $y = (y_0 : y_1)$. Zeigen Sie, dass diese Abbildungen injektiv sind, und dass ihre Bilder algebraische Mengen sind. Erraten Sie dafür die definierenden Polynome und überprüfen Sie die Gleichheit auf den offenen Mengen $D_+(T_j) \subset \mathbb{P}^n(k)$.

Aufgabe 4. Sei $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine endliche Teilmenge. Konstruieren Sie eine Hyperfläche $X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^n(k)$ so, dass die komplementäre offenen Teilmenge

$$U = D_+(f) = \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus X \subset \mathbb{P}^n(k)$$

eine Umgebung von Z ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 11. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.