

Klausur zur Vorlesung Algebra

Erste Klausur am 25. Juli 2016

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Einschreibungssemester:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher und elektronische Geräte bleiben die gesamte Klausur über im Rucksack verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $A = \text{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe. Rechnen Sie explizit nach, dass die Verknüpfung

$$(a, f) \cdot (b, g) = (af(b), f \circ g)$$

auf der Menge $G \times A$ eine Gruppenstruktur liefert, für welche $G = G \times \{\text{id}\}$ eine normale Untergruppe und $\text{Aut}(G)$ die entsprechende Restklassengruppe ist. Welche Ordnung hat diese Gruppe $G \rtimes A$ für $G = C_{25}$?

Aufgabe 2. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $G = S_4$. Bestimmen Sie für jede Primzahl $p > 0$ die Anzahl $s_p \geq 1$ der Sylow- p -Untergruppen $H \subset G$. Für welche $p > 0$ ist $H \subset G$ normal, und für welche $p > 0$ ist H zyklisch?

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ die Teilmenge aller nilpotenten Elemente. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal ist, und dass im Restklassenring R/\mathfrak{a} nur das Nullelement nilpotent ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von beliebiger Charakteristik, $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluss, und $\zeta \in \Omega^\times$ ein Element endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $K \subset K(\zeta)$ abelsch ist.

Aufgabe 5. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung, dessen Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L/K)$ eine elementar-abelsche p -Gruppe von Ordnung $\text{ord}(G) = p^2$ ist. Zeigen Sie, dass es genau $p + 3$ Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt.