Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 16

Übungen zur Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. Beweisen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder K-Vektorraum V eine Basis $x_\lambda \in V$, $\lambda \in L$ enthält, indem sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge produzieren.

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{C}[T,U]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten, und $\mathfrak{m} \subset R$ die Teilmenge aller Polynome $f = \sum \lambda_{ij} T^i U^j$ mit konstantem Term $\lambda_{0,0} = 0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathfrak{m} \subset R$ ist ein maximales Ideal.

(ii) $\mathfrak{m} \subset R$ ist ein Primideal.

(iii) $\mathfrak{m} \subset R$ ist ein Hauptideal.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der Ring aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Addition und Multiplikation sind dabei punktweise definiert. Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Teilmenge $\mathfrak{m}_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}$.

(i) Verifizieren Sie, dass $\mathfrak{m}_a \subset R$ ein maximales Ideal ist.

(ii) Zeigen Sie, dass aus $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b$ bereits folgt, dass $a = b$ gilt.

(iii) Beweisen Sie, dass es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ gibt, das nicht von der Form $\mathfrak{m}_a$, $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4. Sei $R \subset \mathbb{C}[T]$ die Teilmenge aller Polynome $f = \sum a_i T^i$ mit linearem Term $a_1 = 0$, und $\mathfrak{m} \subset R$ die Teilmenge aller Polynome, für die zusätzlich gilt $a_0 = 0$.

(i) Überprüfen Sie, dass $R \subset \mathbb{C}[T]$ ein Unterring ist.

(ii) Verifizieren Sie, dass $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} \subset R$ kein Hauptideal ist.

(iv) Beweisen Sie, dass kein $f \in \mathfrak{m}$ ein Primelement in R ist.

(v) Folgern Sie, dass kein $f \in \mathfrak{m}$ als Produkt von Primelementen geschrieben werden kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 9. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.