Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 16

Übungen zur Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Verifizieren Sie, dass die folgenden Teilmengen ebenfalls Ideale sind:

(i) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$

(ii) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}\}$

(iii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$

(iv) $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{y \in R \mid y\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$

(v) $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{y \in R \mid y^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \geq 0\}$

Aufgabe 2. Seien $p < q$ zwei Primzahlen, und G eine Gruppen von Ordnung $n = p^2q^2$. Beweisen Sie, dass G nicht einfach ist, indem Sie die Konjugationswirkung von G auf der Menge $X = \mathrm{Syl}_q(G)$ sowie den resultierenden Homomorphismus $f : G \to S_X$ betrachten.

Aufgabe 3. Geben Sie alle Isomorphieklassen von abelschen Gruppen G der Ordnung $n = 3375$, $n = 3374$ sowie $n = 3376$ an, zusammen mit den invarianten Faktoren $n_r | n_{r-1} | \ldots | n_1$.

Aufgabe 4. Sei G ein endliche Gruppe, $N \subset G$ ein Normalteiler, und $H \subset G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $H \cap N \subset N$ ist eine Sylow-p-Untergruppe.

(ii) $NH/N \subset G/N$ ist eine Sylow-p-Untergruppe.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.