Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 16

# Übungen zur Algebra

## Blatt 6

**Aufgabe 1.** Geben Sie für die folgenden endlichen Gruppen und Primzahlen $p > 0$ jeweils zwei Sylow-$p$-Untergruppe an:

(i) Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

(ii) Die symmetrischen Gruppe $S_{2p}$.

(iii) Die diedrische Gruppe $D_n$ und $p = 2$, mit $n \geq 3$ ungerade.

(iv) Die alternierende Gruppe $A_5$ und $p = 2$.

(v) Die projektive lineare Gruppe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $p = 3$.

**Aufgabe 2.** Sei $G$ eine $p$-Gruppe, von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = p^\nu$. Zeigen Sie vermöge Induktion nach $\nu \geq 0$, dass es eine aufsteigende Folge

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\nu = G$$

von Normalteiler in $G$ gibt so, dass $G_i/G_{i-1} = C_p$ für $1 \leqslant i \leqslant \nu$ gilt.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die Konjugationswirkung von $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ auf der Menge $X$ der trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$.

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen $GA \subset X$.

(ii) Wählen Sie aus jeder Bahn einen Representanten $J$, und bestimmen Sie den Index der Standgruppe $G_J$.

(iii) Geben Sie mit der der Bahnengleichung

$$\mathrm{Card}(X) = \sum_{GJ \in G \backslash X} [G : G_J].$$

eine Formel für $\mathrm{Card}(X)$ an.

**Aufgabe 4.** Wieviele Sylow-5-Untergruppen gibt es in der symmetrischen Gruppe $S_6$?

**Abgabe:** Wegen Fronleichnam bis Mittwoch, den 25. Mai um 16:25 Uhr im Zettelkasten. Blatt 7 wird nicht in der Vorlesung ausgeteilt, sondern steht ab Mittwoch, den 25. Mai auf der Homepage zur Vorlesung zur Verfügung.