Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 16

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Wir betrachten die folgenden Permutationen:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = (145)(26).$$

Bestimmen Sie für die Elemente

$$\sigma_1 = \tau^{-1}\eta, \quad \sigma_2 = \tau^2, \quad \sigma_3 = \eta^5, \quad \sigma_4 = \tau^2\eta^2, \quad \text{und} \quad \sigma_5 = \eta^{25}.$$

aus der symmetrischen Gruppe S_6 die Zyklenzerlegung und bestimmen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma_i) = \pm 1$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es Isomorphismen von Gruppen

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3 \quad \text{und} \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$$

gibt, indem Sie die Matrizen

$$A \in \mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_p) = \mathrm{SL}_n(K)/\mu_n(K)$$

die 1-dimensionalen Untervektorräume $L \subset K^n$ permutieren lassen.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe vom endlichen Index $n = [G : H]$, und

$$a_1H, \ldots, a_nH \in G/H$$

deren Nebenklassen.

(i) Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler $N \subset G$ gibt, der in H enthalten ist und dessen Index $[G : N]$ ein Teiler von $n!$ ist, indem Sie einen geeigneten Homomorphismus $f : G \to S_n$ konstruieren.

(ii) Folgern Sie daraus, dass jede Untergruppe $H \subset G$ vom Index $n = 2$ normal sein muss.

Aufgabe 4. Verifizieren Sie die folgenden Aussagen über die symmetrischen Gruppen S_n:

(i) Es gibt ein Element $\sigma \in S_{12}$ von Ordnung 42.

(ii) Es gibt 36 Transpositionen $\tau \in S_9$.

(iii) Modulo Konjugation gibt es drei Elemente $\eta \in S_6$ von Ordnung zwei.

(iv) Das Zentrum $Z \subset S_n$ ist trivial für $n \geq 3$.

(v) Jeder Homomorphismus $f : S_n \to C_3$ ist trivial. Ebenso sind alle Homomorphismen $g : A_n \to C_3$ trivial für $n \geq 5$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 12. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.