Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Verifizieren Sie, dass f genau dann stetig im Sinne der Analysis ist ($\forall a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$), wenn sie stetig im Sinne der Topologie ist (Urbilder von offenen Mengen sind offen).

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $S = \{a, b\}$ der Sierpiński-Raum. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen der Menge $\mathscr{T}$ aller offenen Teilmengen $U \subset X$ und der Menge $\mathrm{Hom}(X, S)$ aller stetigen Abbildungen $f : X \to S$ gibt.

Aufgabe 3. Geben Sie alle Topologien $\mathscr{T}$ auf einer drei-elementigen Menge

$$X = \{a, b, c\}$$

an, und skizzieren Sie dabei die offenen Teilmengen. (Tipp: Unterscheiden Sie nach der Anzahl der zwei-elementigen offenen Teilmengen.)

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sein *Spektrum*

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \mid \ \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$$

ist die Menge aller Primideale. Zu jedem Ringelement $f \in R$ sei $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$ die Menge aller $\mathfrak{p} \subset R$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass die Teilmengen $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$, $f \in R$ die Basis einer Topologie bilden. Diese wird die *Zariski-Topologie* genannt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 29. Oktober um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut WS 15/16
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}$ die reelle Gerade, versehen mit der Standardtopologie, und $\mathbb{R}_l$ die reelle Gerade, ausgestattet mit der Sorgenfrey-Topologie. Welche der folgenden Abbildungen sind stetig?

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto x; \\ g &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x; \\ h &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto -x; \\ k &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Kollektion aller abgeschlossenen Intervalle der Form $H_\lambda =]-\infty, \lambda]$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Verifizieren Sie, dass $\mathscr{B}$ die Basis einer Topologie $\mathscr{T}$ auf der Menge $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass bezüglich der Topologie $\mathscr{T}$ beliebige Durchschnitte von offenen Menge wieder offen sind.

(iii) Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathscr{T}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum, und $U_1, \ldots, U_n \subset X$ endliche viele dichte offene Teilmengen. Zeigen Sie, dass dann auch der Durchschnitt

$$U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$$

dicht in X ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, und $A, B \subset X$ zwei Teilmengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Abschluss und Inneres:

(i) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iv) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 5. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein zusammenhängender Raum. Verifizieren Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{Q}$ konstant sein muss.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Unterräume

$$A = [0,1] \quad \text{und} \quad B = [0,1[\quad \text{und} \quad C =]0,1[$$

von $X = \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Zusammenhangs-Argumenten, dass diese Räume paarweise nicht-homöomorph sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgenden Unterräume von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ wegzusammenhängend und damit insbesondere zusammenhängend sind:

(i) Der Unterraum S aller Skalarprodukte.

(ii) Der Unterraum N aller nilpotenten Matrizen.

(iii) Der Unterraum $\mathrm{SO}(n)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante eins.

Aufgabe 4. Sei X eine abzählbar-unendliche Menge, versehen mit der Topologie der endlichen Komplemente. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist, aber dass die Wegkomponenten genau die 1-elementigen Teilmengen $\{x\} \subset X$ sind, also

$$\pi_0(X) = X.$$

(Benutzen Sie dabei folgendes Resultat von Sierpiński: das Einheitsintervall lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung von abzählbar-unendlich vielen abgeschlossenen Teilmengen schreiben.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 12. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Die **Zulassung zur Prüfung** erhalten Sie, wenn Sie auf den 12 Übungsblätter mindestens 40% der Punkte erreichen, also $12 \times 20 \times 0,4 = 96$ Punkte.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 4

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass die 0-Mannigfaltigkeiten genau die diskreten Räume mit abzählbar vielen Punkten sind.

Aufgabe 2. Sei X eine n-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente $U \subset X$ offen, abgeschlossen und wegzusammenhängend ist. Folgern Sie daraus, dass X eine abzählbare Summe von wegzusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind Mannigfaltigkeit?

(i) Der Graph $A = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Die Nullstellenmenge $B = \{(x, y) \mid P(x, y) = 0\}$ für das Polynom

$$P(x, y) = x^2 - y^3.$$

(iii) Die Teilmenge $C = \mathbb{Q}^2$ der rationalen Vektoren.

(iv) Die topologische Sinuskurve D, also der Abschluss der Teilmenge

$$\{(x, \sin(1/x) \mid x > 0\}.$$

(v) Die Teilmenge $E = \{1/n \mid n \geq 1\} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Räume

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Benutzen Sie Alexandroff-Kompaktifizierungen, um zu beweisen, dass diese beiden 2-Mannigfaltigkeiten nicht homöomorph sind.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 3. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

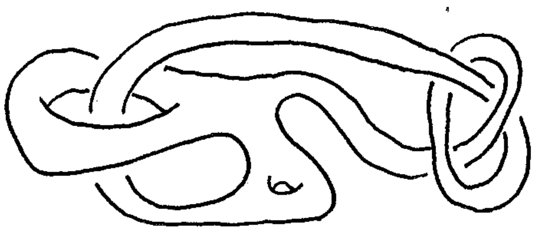
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

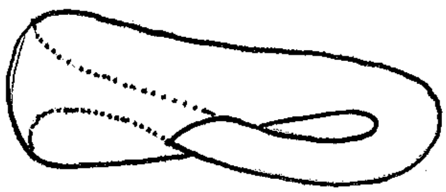
Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 5

Aufgabe 1. Welche 2-Mannigfaltigkeit ist hier abgebildet?



Aufgabe 2. Die Kleinsche Flasche X ensteht als Quotientenraum aus einem regulären Viereck P bezüglich des Flächenworts $abab^{-1}$ und kann so veranschaulicht werden:



Verifizieren Sie $X = P^2 \# P^2$ auf zwei Weisen:

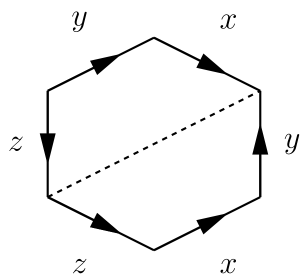
(i) Indem Sie in der Veranschaulichung zwei Möbius-Bänder ausmachen.

(ii) Indem Sie das Viereck P diagonal aufschneiden und neu verkleben, und so das Flächenwort $abab^{-1}$ in Normalform $z_1^2 z_2^2$ bringen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die beiden 2-Mannigfaltigkeiten

$$P^2 \# T^2 \quad \text{und} \quad P^2 \# P^2 \# P^2,$$

homömorph sind, indem Sie das Flächenwort $z^2xyx^{-1}y^{-1}$ auf die Normalform $z_1^2z_2^2z_3^2$ bringen. Schneiden/verkleben Sie dabei zweimal hintereinander und wenden Sie dann Aufgabe 2 an. Beginnen Sie mit einem Schnitt entlang der gestrichelten Linie und Verklebung entlang der z-Seiten:



Aufgabe 4. Wir fassen den Torus T^2 als Quotient eines regulären 4-Ecks P bezüglich des Flächenwortes $aba^{-1}b^{-1}$ an. Geben Sie eine Triangulierung $T^2 \simeq |K|$ an, indem Sie P in Dreiecke zerlegen. Beachten Sie dabei, dass in einem simplizialen Komplex $K = (V, S)$ jeder Simplex $\sigma \in S$ bereits durch seine Ecken $v_0, \dots, v_n \in V$ eindeutig festgelegt sein muss.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 10. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Fußpunkt, und $X_\lambda \subset X$, $\lambda \in L$ die Familie aller quasikompakten Teilmengen, welche den Fußpunkt enthalten. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Jedes Element von $\pi_1(X, a)$ ist im Bild eines $\pi_1(X_\lambda, a)$ enthalten.

(ii) Verschwindet ein Element von $\pi_1(X_\lambda, a)$ in $\pi_1(X, a)$, so verschwindet es bereits in einem $\pi_1(X_\mu, a)$ für ein $X_\lambda \subset X_\mu$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn sich für $n = 0, 1$ jede stetige Abbildung $S^n \to X$ auf der Einheitssphäre zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \to X$ auf dem Einheitsball fortsetzen lässt.

Aufgabe 3. Sei X ein Raum, $A \subset X$ ein Unterraum und $a \in A$ ein Fußpunkt. Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit der Eigenschaft $r|_A = \mathrm{id}_A$. Folgern Sie, dass die induzierte Abbildung $\pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist, und dass die Fundamentalgruppe von X als semidirektes Produkt

$$\pi_1(X, a) = H \rtimes \pi_1(A, a)$$

für einen Normalteiler $H \subset \pi_1(X, a)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 4. Sei G eine topologische Gruppe. Seien $w, v : I \to G$ zwei Schleifen am neutralen Element $e \in G$. Beweisen Sie die foldenden beiden Aussagen:

(i) Die Zusammensetzungen $w \star v$ ist homotop zur Produktschleife $w(t)v(t)$.

(ii) Die beiden Produktschleifen $w(t)v(t)$ und $v(t)w(t)$ sind homotop.

Deduzieren Sie daraus, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ der Einheitskreis, $e \in S^1$ das Einselement, und n eine ganze Zahl. Verifizieren Sie, dass die von $z \mapsto z^n$ induzierte Abbildung auf $\pi_1(S^1, e) = \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit n ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels Fundamentalgruppen, dass der Raum $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 2$, und $U \subset X$ eine offene Teilmenge, deren Komplement endlich ist.

(i) Beweisen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\pi_1(U, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

für jeden Fusspunkt $a \in U$ surjektiv ist.

(ii) Gilt diese Aussage auch für $n = 1$?

(iii) Verifizieren Sie für $X = P^2$ und $U = P^2 \smallsetminus \{b\}$, dass die obige Abbildung nicht injektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $X = P^2 \# P^2$ die Kleinsche Flasche. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ von zwei Elementen erzeugt wird, und skizzieren Sie entsprechende Schleifen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 7. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 8

Aufgabe 1. Fassen Sie P^2 als Vereinigung von einem Möbius-Band und einer Kreisscheibe auf. Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(P^2, a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$. Sei $a \in X$ ein Fußpunkt, $U \subset X$ eine offene Umgebung, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, und $b \neq a$ ein weiterer Punkt aus U. Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass die kanonische Abbildung

$$\pi_1(X \smallsetminus \{b\}, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

bijektiv ist. Gilt diese Aussage auch für 2-Mannigfaltigkeiten?

Aufgabe 3. Sei $Z \subset \mathbb{R}^2$ eine unendliche diskrete abgeschlossene Teilmenge, und $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus Z$. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4. Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung mit $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängen. Drücken sie mittels des Satzes von Seifert–van Kampen die erste Homologiegruppe $H_1(X) = \pi_1(X, a)^{\mathrm{ab}}$ durch die Homologiegruppen

$$H_1(U), \quad H_1(V) \quad \text{und} \quad H_1(U \cap V)$$

aus. Was ergibt sich daraus für die erste Betti-Zahl $b_1(X)$?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 14. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Surjektion, mit X quasikompakt und Y Hausdorffsch. Folgern Sie, dass Y die Quotiententopologie trägt.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei kompakte, zusammenhängende, nichtleere 2-Mannigfaltigkeiten. Verifizieren Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Räume X und Y sind homöomorph.

(ii) Die Räume X und Y haben den gleichen Homotopietyp.

(iii) Die Gruppen $\pi_1(X, a)$ und $\pi_1(Y, b)$ sind isomorph.

(iv) Die abelschen Gruppen $H_1(X)$ und $H_1(Y)$ sind isomorph.

(v) Die $\mathbb{F}_p$-Vektorräume $H_1(X, \mathbb{F}_p)$ und $H_1(Y, \mathbb{F}_p)$ haben die gleiche Dimension, für jeweils $p = 2$ und $p = 3$.

Aufgabe 3. Unter der *Narrenkappe* versteht man den Raum X, der aus einem Dreieck P ensteht, indem alle drei Seiten miteinander identifiziert werden, und zwar gemäß des Wortes z^3. Berechnen Sie $\pi_1(X, a)$.

Aufgabe 4. Sei Z der Raum, der aus $Y = P^2$ durch Ankleben einer weiteren Kopie $X = P^2$ bezüglich einer Anklebeabbildung $\varphi : \{a\} \to \{b\}$ entsteht. Sei $c \in C$ der Punkt, welcher $a \in X$, $b \in Y$ entspricht.

(i) Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(Z, c)$ isomorph zur Summe $C_2 \star C_2$ ist, wobei C_2 die zyklische Gruppe von Ordnung zwei ist.

(ii) Folgern Sie, dass die erste Betti-Zahl $b_1(Z)$ verschwindet.

(iii) Verwenden Sie eine geeignete Darstellung $\pi_1(Z, c) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ um zu verifizieren, dass die Gruppe G unendlich ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut WS 15/16
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei B zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend, $\varphi : I \to B$ ein Weg vom Fußpunkt $b \in B$ zu einem Punkt $y \in B$. Verifizieren Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\tilde{w} : I \longrightarrow \tilde{B}, \quad t \longmapsto (y_t, [\varphi_t])$$

stetig ist. Hierbei ist $y_t = \varphi(t)$, und $\varphi_t(s) = \varphi(st)$.

Aufgabe 2. Seien $f : B' \to B$ eine stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden Räumen. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{B}' \longrightarrow \tilde{B}, \quad (y', [w']) \longmapsto (f(y'), [f \circ w'])$$

zwischen den universellen Überlagerungen stetig ist.

Aufgabe 3. Sei $f : B' \to B$ eine stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen, und

$$\tilde{f} : \tilde{B}' \longrightarrow \tilde{B}$$

die induzierte Abbildung zwischen den universellen Überlagerungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f injektiv $\Rightarrow \tilde{f}$ injektiv.

(ii) f surjektiv $\Rightarrow \tilde{f}$ surjektiv.

(iii) $\tilde{f}$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

(iv) $\tilde{f}$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv.

(v) f Homöomorphismus $\Rightarrow \tilde{f}$ Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(B, b)$ einer topologischen Mannigfaltigkeit B stets abzählbar ist.

Tipp: Sei $U_i \subset B$, $i \in I$ eine abzählbare Basis aus offenen Teilmengen, die homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ sind. Seien $U_{ijr} \subset U_i \cap U_j$ die abzählbar vielen Wegkomponenten der Mannigfaltigkeit $U_i \cap U_j$. Wähle Punkte $x_{ijr} \in U_{ijr}$. Falls $x_d, x_{d'} \in U_k$ für

$$d = (i, j, r) \quad \text{und} \quad d' = (i', j', r') \quad \text{und} \quad k \in I,$$

wähle einen Weg $\varphi_{dd'k} : I \to U_k$ von x_d nach $x_{d'}$. Folgern Sie dann mithilfe einer Lebesgue-Zahl, dass jedes Element aus $\pi_1(B, b)$ aus einer Zusammensetzung von gewissen Wegen $\varphi_{dd'k}$ gewonnen werden kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei B eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit vom Geschlecht $g \geq 1$. Verifizieren Sie mit dem Hauptsatz der Überlagerungstheorie, dass es unendlich viele Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : X \to B$ mit zusammenhängendem Totalraum X und $\deg(X/B) = \infty$ gibt.

Aufgabe 2. Sei $B = P^2 \# P^2$ die Kleinsche Flasche, und $p : X \to B$ die Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, für welche die Untergruppe $p_* \pi_1(X, a) \subset \pi_1(B, b)$ von

$$z_1^2, z_1 z_2 \in \pi_1(B, b) = \langle z_1, z_2 \mid z_1^2 z_2^2 \rangle$$

erzeugt wird. Rechnen Sie nach, dass die Fundamentalgruppe des Totalraums abelsch ist, und folgern Sie, dass X homöomorph zum Torus T^2 ist.

Aufgabe 3. Sei $p : X \to B$ eine endlichen Überlagerung des Torus $B = T^2$ mit nichtleerem, zusammenhängendem Totalraum. Zeigen Sie ähnlich wie bei der vorangegangenen Aufgabe, dass der Totalraum homöomorph zum Torus sein muss.

Aufgabe 4. Sei B eine kompakte zusammenhängende nichtleere 2-Mannigfaltigkeit. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen von Überlagerungen $X \to B$ vom Grad $\deg(X/B) = 2$ mit zusammenhängenden nichtleerem Totalraum.

Tipp: Benutzen Sie, dass Untergruppen vom Index zwei stets normal sind, und zählen sie die surjektiven Homomorphismen $\pi_1(B, b) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 4. Februar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.