Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei B zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend, $\varphi : I \to B$ ein Weg vom Fußpunkt $b \in B$ zu einem Punkt $y \in B$. Verifizieren Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\tilde{w} : I \longrightarrow \tilde{B}, \quad t \longmapsto (y_t, [\varphi_t])$$

stetig ist. Hierbei ist $y_t = \varphi(t)$, und $\varphi_t(s) = \varphi(st)$.

Aufgabe 2. Seien $f : B' \to B$ eine stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden Räumen. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{B}' \longrightarrow \tilde{B}, \quad (y', [w']) \longmapsto (f(y'), [f \circ w'])$$

zwischen den universellen Überlagerungen stetig ist.

Aufgabe 3. Sei $f : B' \to B$ eine stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen, und

$$\tilde{f} : \tilde{B}' \longrightarrow \tilde{B}$$

die induzierte Abbildung zwischen den universellen Überlagerungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f injektiv $\Rightarrow \tilde{f}$ injektiv.

(ii) f surjektiv $\Rightarrow \tilde{f}$ surjektiv.

(iii) $\tilde{f}$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

(iv) $\tilde{f}$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv.

(v) f Homöomorphismus $\Rightarrow \tilde{f}$ Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(B, b)$ einer topologischen Mannigfaltigkeit B stets abzählbar ist.

Tipp: Sei $U_i \subset B$, $i \in I$ eine abzählbare Basis aus offenen Teilmengen, die homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ sind. Seien $U_{ijr} \subset U_i \cap U_j$ die abzählbar vielen Wegkomponenten der Mannigfaltigkeit $U_i \cap U_j$. Wähle Punkte $x_{ijr} \in U_{ijr}$. Falls $x_d, x_{d'} \in U_k$ für

$$d = (i, j, r) \quad \text{und} \quad d' = (i', j', r') \quad \text{und} \quad k \in I,$$

wähle einen Weg $\varphi_{dd'k} : I \to U_k$ von x_d nach $x_{d'}$. Folgern Sie dann mithilfe einer Lebesgue-Zahl, dass jedes Element aus $\pi_1(B, b)$ aus einer Zusammensetzung von gewissen Wegen $\varphi_{dd'k}$ gewonnen werden kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.