Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein zusammenhängender Raum. Verifizieren Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{Q}$ konstant sein muss.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Unterräume

$$A = [0,1] \quad \text{und} \quad B = [0,1[\quad \text{und} \quad C =]0,1[$$

von $X = \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Zusammenhangs-Argumenten, dass diese Räume paarweise nicht-homöomorph sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgenden Unterräume von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ wegzusammenhängend und damit insbesondere zusammenhängend sind:

(i) Der Unterraum S aller Skalarprodukte.

(ii) Der Unterraum N aller nilpotenten Matrizen.

(iii) Der Unterraum $\mathrm{SO}(n)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante eins.

Aufgabe 4. Sei X eine abzählbar-unendliche Menge, versehen mit der Topologie der endlichen Komplemente. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist, aber dass die Wegkomponenten genau die 1-elementigen Teilmengen $\{x\} \subset X$ sind, also

$$\pi_0(X) = X.$$

(Benutzen Sie dabei folgendes Resultat von Sierpiński: das Einheitsintervall lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung von abzählbar-unendlich vielen abgeschlossenen Teilmengen schreiben.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 12. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Die **Zulassung zur Prüfung** erhalten Sie, wenn Sie auf den 12 Übungsblätter mindestens 40% der Punkte erreichen, also $12 \times 20 \times 0,4 = 96$ Punkte.