Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Verifizieren Sie, dass f genau dann stetig im Sinne der Analysis ist ($\forall a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$), wenn sie stetig im Sinne der Topologie ist (Urbilder von offenen Mengen sind offen).

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $S = \{a, b\}$ der Sierpiński-Raum. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen der Menge $\mathscr{T}$ aller offenen Teilmengen $U \subset X$ und der Menge $\mathrm{Hom}(X, S)$ aller stetigen Abbildungen $f : X \to S$ gibt.

Aufgabe 3. Geben Sie alle Topologien $\mathscr{T}$ auf einer drei-elementigen Menge

$$X = \{a, b, c\}$$

an, und skizzieren Sie dabei die offenen Teilmengen. (Tipp: Unterscheiden Sie nach der Anzahl der zwei-elementigen offenen Teilmengen.)

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sein *Spektrum*

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \mid \ \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$$

ist die Menge aller Primideale. Zu jedem Ringelement $f \in R$ sei $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$ die Menge aller $\mathfrak{p} \subset R$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass die Teilmengen $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$, $f \in R$ die Basis einer Topologie bilden. Diese wird die *Zariski-Topologie* genannt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 29. Oktober um 8:25 Uhr im Zettelkasten.