Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 15

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

Erste Klausur am 18. Juli 2015

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Einschreibungssemester:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben die gesamte Klausur über im Rucksack verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmengen

$$U \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

aller oberen Dreiecksmatrizen mit reellen Einträgen bzw. aller Hermiteschen Matrizen. Bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraumes

$$V/(V \cap U).$$

Aufgabe 2. Auf der Teilmenge $X \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ aller symmetrischen Matrizen betrachten wir die Relation

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \rho \in \mathbb{R}^\times,\, S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ mit } \rho B = {}^t\! SAS.$$

Verifizieren Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(K).$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$, das Minimalpolynom $\mu_A(T)$, die Jordan-Normalform, sowie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wie viele Ähnlichkeitsklassen von nilpotenten Matrizen

$$A \in \mathrm{Mat}_6(K)$$

gibt es?

Aufgabe 5. Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \quad (h, y) \longmapsto (x \mapsto h(x)y)$$

bilinear ist, und dass die resultierende lineare Abbildung

$$f : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \quad h \otimes y \longmapsto (x \mapsto h(x)y)$$

bijektiv ist.