Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die hermitesche Form $\Phi(x, y) = {}^t x A \bar{y}$ zur hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & i \\ -i & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

nichtentartet? Bestimmen Sie dafür die Signatur (p, q) in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Zwei hermitesche Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ nennt man kongruent, wenn $A' = {}^t S A \bar{S}$ für ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge aller hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, dass V ein reeller Untervektorraum, jedoch für $n \geq 1$ kein komplexer Untervektorraum ist.

(ii) Berechnen Sie die Dimension des reellen Vektorraumes V.

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Kongruenzklassen von Hermiteschen Matrizen $A \in V$, und prüfen Sie ihre Antwort in den Spezialfällen $n = 0, 1$. (Tipp: Sylvesters Trägheitssatz, zusammen mit Blatt 10, Aufgabe 3.)

Aufgabe 3. (i) Verifizieren Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(n)$ als Produkt von einer geraden Zahl von orthogonalen Spiegelungen geschrieben werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes $S \in \mathrm{O}(2)$ ein Produkt von höchstens zwei orthogonalen Spiegelungen ist.

(iii) Folgern Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(3)$ als Produkt von zwei orthogonalen Spiegelungen schreibbar ist.

(iv) Deduzieren Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(3)$ einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt, also eine "Rotationsachse" hat.

Aufgabe 4. Schreiben Sie den Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}),$$

welcher durch die Konjugation auf dem 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum der spurlosen antihermiteschen 2×2-Matrizen gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x+iy & -r+is \\ r+is & x-iy \end{pmatrix} \longmapsto \big(a_{ij}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3},$$

mit Matrizeneinträgen $a_{ij} = a_{ij}(x,y,r,s) \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.