Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $a_1, \ldots, a_m \in V$ und $b_1, \ldots, b_n \in W$ Basen, und $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ die resultierende Matrix zu f. Rechnen Sie nach, dass die Transponierte ${}^tA$ die Matrix zur dualen Abbildung

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

bezüglich der dualen Basen $a_1^*, \ldots, a_m^* \in V^*$ und $b_1^*, \ldots, b_n^* \in W^*$ ist.

Aufgabe 2. Sei V ein reller Vektorraum von Dimension $n \geq 1$, versehen mit einer nichtentarteten symmetrischen Bilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Signatur $(p, q) = (n-1, 1)$. Sei $a \neq 0$ ein Vektor und $U \subset V$ sein orthogonales Komplement.

(i) Verifizieren Sie, dass die Einschränkung von Φ auf U nichtentartet ist genau dann, wenn $a \in V$ nicht lichtartig ist, also entweder raumartig oder zeitartig ist.

(ii) Bestimmen Sie in diesem Fall die Signatur von $\Phi : U \times U \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, versehen mit einer Bilinearform $\Phi : V \times V \to K$, die symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Man bezeichnet die Teilmenge

$$V^0 = \{x \in V \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}\,.$$

als das *Radikal* der Bilinearform. Zeigen Sie, dass $V^0 \subset V$ ein Untervektorraum ist, und dass

$$\Psi(x + V^0, y + V^0) = \Phi(x, y)$$

eine wohldefinierte Bilinearform auf dem Quotientenvektorraum V/V^0 liefert, welche nichtentartet ist.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \neq 2$. Wir bezeichen mit $\langle x, h \rangle = h(x)$ die kanonische Paarung $V \times V^* \to K$. Sei $a \in V$ ein Vektor und $a^\vee \in V^*$ eine Linearform mit $\langle a, a^\vee \rangle = 2$. Wir bilden dazu den Endomorphismus

$$s = s_{a,a^\vee} : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - \langle x, a^\vee \rangle a.$$

Zeigen Sie Folgendes:

(i) Es gilt $s^2 = \mathrm{id}_V$, und der Endomorphismus s ist diagonalisierbar.

(ii) Die Hyperebene $\mathrm{Ker}(a^\vee) \subset V$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$, die Gerade $Ka \subset V$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(iii) Jeder Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f^2 = \mathrm{id}_V$, bei dem der Eigenwert $\lambda = -1$ die algebraische Multiplizität $m = 1$ hat, ist von der Form $f = s_{a,a^\vee}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Schriftliche Prüfungen: Die Anmeldungen erfolgen wie im letzten Semester über das Studierendenportal. Die Anmeldefrist für die am 18.7. stattfindende erste Klausur läuft vom 8.6.–4.7., eine Abmeldung ist bis zum 11.7. möglich.

Alle Prüflinge müssen sich fristgerecht anmelden. Nachträgliche Anmeldungen sind ausgeschlossen. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllen, gelten als abgemeldet. Insbesondere Wiederholer, die in der Vergangenheit die Zulassungsvoraussetzung erreicht haben, müssen sicherstellen, dass in unseren Teilnehmerlisten die Anmeldung sowie Erfüllung der Zulassungsvoraussetzungen vermerkt wurden.