Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir schreiben $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Welche der Ausdrücke

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= (x_1 - y_2)^2\\ \Psi(x,y) &= x_2y_1 - x_1y_2\\ \Theta(x,y) &= x_1^2 - x_1y_2 + y_2^2\\ \Upsilon(x,y) &= x_1y_1 + 2\\ \Delta(x,y) &= x_1y_1 + x_1y_2.\end{aligned}$$

liefern Bilinearformen auf dem Standardvektorraum $V = K^2$?

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $B_1, \ldots, B_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 3. Wir betrachten die reellen 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass A, B als komplexe Matrizen kongruent sind, jedoch als reelle Matrizen nicht kongruent sind.

Aufgabe 4. Sei U ein Vektorraum, U^* sein Dualraum, und $V = U \oplus U^*$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((x, f), (y, g)) \longmapsto f(y) - g(x).$$

Zeigen Sie, dass Φ eine Bilinearform ist, welche alternierend und nichtentartet ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.