Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie explizit die Matrizen, die entstehen, wenn

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

in die folgenden drei Polynome eingesetzt wird:

$$f(T) = T^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(T) = (T - i)(T + i) \quad \text{und} \quad h(T) = \chi_A(T).$$

Aufgabe 2. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\mu_{A+B}(T) = \mu_A(T) + \mu_B(T)$.

(ii) $\mu_{A^2}(T^2) = \mu_A(T)$

(iii) $\mu_A(0) = (-1)^n \det(A)$.

(iv) A ist Skalarmatrix genau dann, wenn $\deg(\mu_A) = 1$.

(v) Ist $\mu_A(B) = 0$, so ist jeder Eigenwert von B auch ein Eigenwert von A.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Angenommen, für ein $r \geq 0$ sind die zwei Vektoren

$$f^r, f^{r+1} \in \mathrm{End}_K(V)$$

linear abhängig. Zeigen Sie, dass f höchstens zwei Eigenwerte besitzt. Stellen Sie weiterhin eine Vermutung für den Fall auf, dass $f^r, \ldots, f^{r+d} \in \mathrm{End}_K(V)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \to V$ ein Automorphismus, und $g : V \to V$ die inverse Abbildung. Drücken Sie das Minimalpolynom

$$\mu_g(T) \in K[T]$$

durch das Minimalpolymon $\mu_f(T)$ aus. Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $V = K$ sowie $V = K^2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 13.5. um 18:00 Uhr im Zettelkasten (wegen Christi Himmelfahrt).