Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Schreiben Sie im Ring $\mathbb{F}_7[T]$ das Polynom

$$h = T^5 + 6T^4 + 6T^3 + T + 2$$

als Produkt von Linearfaktoren sowie einem Polynom ohne Nullstellen, und bestimmen Sie somit die Multiplizitäten der Wurzeln.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(f_0, f_1)$ in $\mathbb{Q}[T]$ für die Polynome

$$f_0 = 2T^3 - 4T^2 + T - 2 \quad \text{und} \quad f_1 = T^3 - T^2 - T - 2,$$

und schreiben Sie ihn in der Form $g = a_0 f_0 + a_1 f_1$.

Aufgabe 3. Sei T eine Unbestimmte. Wir betrachten hier die formalen Binomialkoeffizienten

$$\binom{T+n}{n} = \frac{(T+n)(T+(n-1))\cdots(T+1)}{n!}$$

als Elemente des Polynomrings $\mathbb{Q}[T]$. Zeigen Sie, dass diese Polynome

$$b_n = \binom{T+n}{n}, \quad n \geq 0$$

eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}[T]$ bilden.

Aufgabe 4. Sei

$$f(T) = T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \in K[T]$$

ein normiertes Polynom. Wir betrachten die endliche K-Algebra

$$A = K[T]/fK[T],$$

und die Restklasse $t \in A$ der Unbestimmten.

(i) Stellen Sie die Matrix der Multiplikationsabbildung

$$t : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto tx$$

bezüglich der Basis $t^0, t^1, \ldots, t^{n-1} \in A$ auf.

(ii) Folgern Sie, dass $t : A \to A$ bijektiv ist genau dann, wenn $f(0) \neq 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 7.5. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.