Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten in $V = \mathrm{Mat}_n(K)$, $n \geq 1$ die drei Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subset V$ der Skalarmatrizen, der Diagonalmatrizen bzw. der oberen Dreiecksmatrizen. Was sind die Dimensionen der Quotientenvektorräume

$$U_3/U_1, \quad U_3/U_2, \quad V/U_1, \quad V/U_2 \quad \text{und} \quad V/U_3?$$

Aufgabe 2. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(K)$ die Relation

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \exists S, T \in \mathrm{GL}_n(K) \text{ mit } B = SAT.$$

Verifizieren Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und $U', U \subset V$ und $W' \subset W \subset V$ Untervektorräume. Deduzieren Sie aus dem Isomorphiesatz die Identifizierungen

$$(U + U')/U' = U/(U \cap U') \quad \text{und} \quad (V/W')/(W/W') = V/W.$$

Geben Sie für diese Identifizierungen nichttriviale Beispiele an, mit Untervektorräumen von

$$V = \mathrm{Mat}_n(K).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir betrachten in $V = \prod_{n=0}^{\infty} K$ den Untervektorraum $U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K$. Beweisen Sie, dass der Quotientenvektorraum V/U unendlich-dimensional ist. (Tipp: Konstruieren Sie einen Endomorphismus, der surjektiv aber nicht injektiv ist.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 30.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.