Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei S ein Monoid und $G = S^\times$ seine Einheitengruppe. Wir definieren auf der Menge S durch

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G \text{ mit } b = gag^{-1}$$

eine Relation. Rechnen Sie nach, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \geq 0$. Wir definieren auf der Menge $X = K^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ eine Relation

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in K^\times \text{ mit } b = \lambda a.$$

(i) Verifizieren Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Der Quotient wird mit $\mathbb{P}^n(K)$ bezeichnet, die Äquivalenzklasse von $(a_0, \ldots, a_n)$ mit $(a_0 : \ldots : a_n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{P}^1(K) \longrightarrow K \cup \{\infty\}, \quad (a_0 : a_1) \longmapsto \begin{cases} a_1/a_0 & \text{wenn } a_0 \neq 0; \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Hierbei ist ∞ ein formales Symbol.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume. Wir betrachten die kanonische lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow (V/U) \oplus (V/U'), \quad x \longmapsto (x + U, x + U').$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist genau dann, wenn $V = U \oplus U'$ eine direkte Summenzerlegung ist.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $V = U \oplus U'$ seine Fitting-Zerlegung, also

$$U = \mathrm{Ker}(f^\infty) \quad \text{und} \quad U' = \mathrm{Im}(f^\infty).$$

Sei $h : V \to V$ ein weiterer Endomorphismus, mit der Eigenschaft $f \circ h = h \circ f$. Beweisen Sie, dass die Untervektorräume $U, U' \subset V$ h-invariant sein müssen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Wir ermuntern Sie, die Aufgaben untereinander zu diskutieren. Die Abgaben müssen jedoch **individuell, handschriftlich und ohne elektronische Hilfsmittel** erfolgen.

Zulassungsvoraussetzung für die Klausuren:

Für Mathematiker: Regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen (Anwesenheitspflicht mit Unterschriftenliste, höchstens zweimaliges unentschuldigtes Fehlen) und Erreichen von 40% = 12 x 20 x 0,4 = 96 Punkten bei den Aufgabenblättern. Haben Sie in der Vergangenheit an einer Prüfung zur Linearen Algebra II ohne Erfolg teilgenommen, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Für Informatiker und Physiker: Erreichen von 32% = 40% x 0,8 = 77 Punkten bei den Aufgabenblättern (80%-Regel). Hatten Sie in der Vergangenheit die Zulassung für eine Prüfung zur Linearen Algebra II, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Webseite zur Lehrveranstaltung:
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~schroeer/15_ss_LA2/2015_ss_linear_algebra_2.html`