Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und $U \subset K^4$ der von den Vektoren

$$a = (1, 2, 3, 4) \quad \text{und} \quad b = (1, 1, -1, -1)$$

erzeugte Untervektorraum. Geben Sie ein Komplement $U' \subset K^4$ an.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Geben Sie alle A-invarianten Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K).$$

Finden Sie alle J-invarianten Untervektorräume $U \subset K^3$.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Beweisen Sie, dass jeder Untervektorraum f-invariant ist genau dann, wenn $f = \lambda \, \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$. (Solche Endomorphismen nennt man auch *Homothetien*.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 16.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte verwenden Sie das **Deckblatt** und **tackern** Sie Ihre Abgaben!

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits ab dem Tag der Ausgabe mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben!
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in korrekten und *vollständigen* deutschen Sätzen auf!
5. Vermeiden Sie weitestgehend die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ etc. im Text! In abgesetzten Formel sind Ausnahmen erlaubt.
6. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren!
7. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
8. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
9. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dies so einfach wie möglich.