Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zum Vorkurs Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1. Skizziere Sie die Teilmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z - i| \leqslant 3\} \subset \mathbb{C}$$

in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 2. Geben Sie zu den folgenden komplexen Zahlen die inversen komplexen Zahlen an:

$$w_1 = 1 + i, \quad w_2 = 1 + 2i, \quad w_3 = 2 + 5i.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{2}{1+i}, \quad z_2 = \frac{3+4i}{1+2i}, \quad z_3 = \frac{1-3i}{2+5i}.$$

Aufgabe 4. Verifizieren Sie die Gleichung $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Aufgabe 5. Geben Sie zu jeder ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ für die komplexe Zahl

$$z_n = (1 + i)^n$$

den Betrag $|z_n| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein Argument $\arg(z_n) \in \mathbb{R}$ an und schreiben Sie z_n in Polarkoordinaten.

Aufgabe 6. Geben Sie für die komplexe quadratische Gleichung

$$X^2 + 2iX - 1 = 0$$

die komplexen Lösungen an.

Aufgabe 7. Geben Sie für die komplexe quadratische Gleichung

$$X^2 + (5 - 11i)X - (22 + 29i) = 0$$

die komplexen Lösungen an.

Aufgabe 8. Finden Sie zur imaginären Zahl $i \in \mathbb{C}$ eine vierte Wurzel, also eine komplexen Zahlen $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^4 = i$.

Aufgabe 9. Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$, und $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Lösung der rellen Gleichung

$$X^n + \lambda_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \lambda_1 X + \lambda_0 = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann auch die konjugierte komplexe Zahl $\bar{z} = a - ib$ eine Lösung ist.

Aufgabe 10. Wir betrachten für $n \geq 1$ die komplexen n-ten Einheitswurzeln $\zeta_k = e^{2\pi ik/n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = (-1)^{n-1}.$$

Hierbei ist $\prod$ das *Produkt-Symbol*, welches analog zum Summen-Symbol Σ definiert ist.

Aufgabe 11. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$, dass

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Aufgabe 12. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 13. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$, dass die ganze Zahl $d = 3$ ein Teiler von $m = n^3 + 2n$ ist.

Aufgabe 15. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$, dass die ganze Zahl $d = 7$ ein Teiler von $m = 5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ ist.

Aufgabe 16. Durch die Vorschrift

$$a_0 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 2 - 1/a_n$$

wird rekursiv eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ von rationalen Zahlen definiert. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n = (n+2)/(n+1)$ gilt.

Aufgabe 17. Durch die Vorschrift

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

wird rekursiv eine Folge $f_0, f_1, f_2, \ldots$ von natürlichen Zahlen defininiert, die sogenannten *Fibonacci-Zahlen*. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$f_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}},$$

wobei $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Aufgabe 18. Welche der beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$$

sind injektiv, welche sind surjektiv?

Aufgabe 19. Wir betrachten die Kosinusfunktion

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \quad x \longmapsto \cos(x).$$

Geben Sie Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ an so, dass die Einschränkung $\cos : [a, b] \to [-1, 1]$ surjektiv aber nicht injektiv, bzw. injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 20. Wieviele Elemente hat die Menge $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

Aufgabe 21. Sie X eine Menge, und $a, b, u, v \in X$ Elemente. Zeigen Sie, dass $a = u$ und $b = v$ genau dann gilt, wenn

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}.$$

Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$. *Bemerkung:* Aufgrund dieser Tatsache läßt sich das *Paar* (a, b) definieren als die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Aufgabe 22. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ferner seien $A, B \subset X$ Teilmengen. Überprüfen Sie, dass für Bilder

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{und} \quad f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

gilt.

Aufgabe 23. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ferner seien $A, B \subset Y$ Teilmengen. Überprüfen Sie, dass für Urbilder

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \text{und} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

gilt.

Aufgabe 24. Seien $X_1, \ldots, X_n$ endlich viele abzählbare Menge. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass dann auch das Produkt

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

abzählbar ist.

Aufgabe 25. Verifizieren Sie, dass die Menge $X = \mathbb{Q}[T]$ aller Polynome

$$P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_0$$

mit $n \geq 0$ und Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Hinweis: Mit diesem Aufgabenblatt möchte ich erreichen, dass Sie sich *aktiv* mit dem Stoff des Vorkurses auseinandersetzen. Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben und *schreiben Sie ihre Lösungen auf.* Sie können gerne Arbeitsgruppen bilden. Ihre Lösungsversuche bilden die Grundlage für die Arbeit in den Übungsgruppen in der zweiten Woche des Vorkurses.