Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Erste Klausur am 7. Februar 2015

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Einschreibungssemester:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben die gesamte Klausur über im Rucksack verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x_1, \ldots, x_n, ix_1, \ldots, ix_n \in V$$

eine Basis von V aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden. Hierbei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Zahl.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $U \subset K^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass es einen Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit $U = \operatorname{Ker}(f)$ gibt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie den Rang und eine Basis des Kerns für

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q}),$$

indem Sie die Matrix auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form bringen.

Aufgabe 4. Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{F}_7)$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$, finden Sie durch Probieren dessen Wurzeln, und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper. Für welche Parameter $t \in K$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 2t-2 & t+3 & -1 \\ 3t-3 & 2t+7 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(K)$$

invertierbar? Berechnen Sie für solche $t \in K$ die inverse Matrix $B^{-1} \in \operatorname{GL}_3(K)$.