Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. (i) Geben Sie die Determinante der folgenden reellen 2×2-Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden 3×3-Matrizen mit der Regel von Sarrus:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

(iii) Berechnen Sie die Determinante der rationalen 4×4-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form bringen.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$. Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

als ein Produkt von Transpositionen. Deduzieren Sie daraus

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n+1}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{Q}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie dafür mit dem Gauß-Algorithmus die inverse Matrix in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 4. Sei $\eta \in S_n$ eine Permutation. Man bezeichnet die mittels Kronecker-Delta definierte Matrix

$$P_\eta = (\delta_{i,\eta(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

als *Permutationsmatrix*. Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass

$$\det(P_\eta) = \mathrm{sgn}(\eta)$$

gilt. Verifizieren Sie weiterhin, dass die Abbildung

$$f : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K), \quad \eta \longmapsto P_\eta$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.