Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Inversen der folgenden invertierbaren Matrizen über dem Körper $K = \mathbb{Q}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix und

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid Ax = \lambda x \text{ für ein } x \in K^n,\ x \neq 0\} \subset K$$

ihr Spektrum, also die Menge der Eigenwerte. Sei $r \geq 0$ eine natürliche Zahl. Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $0 \notin \sigma(A)$.

(ii) Ist A invertierbar und diagonalisierbar, so auch das Inverse A^{-1}.

(iii) Gilt $\lambda \in \sigma(A)$, folgt $\lambda^r \in \sigma(A^r)$.

(iv) Falls $A^r = 0$, so muss $\sigma(A) = \{0\}$.

(v) Gilt $A^2 = E$, dann haben wir $\sigma(A) \subset \{\pm 1\}$.

Aufgabe 3. Finden Sie heraus, welche folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5)$ diagonalisierbar sind, indem Sie jeweils die geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 0$ der fünf möglichen Skalare $\lambda \in \mathbb{F}_5$ betrachten.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit $1 \neq -1$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto {}^tA,$$

der eine Matrix $A = (\alpha_{ij})$ auf die transponierte Matrix ${}^tA = (\alpha_{ji})$ abbildet. Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist, indem Sie eine Basis aus Eigenvektoren angeben. Zeigen Sie weiterhin, dass f für den Körper $K = \mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungsanmeldung: Die Anmeldung für die Prüfungen zur Linearen Algebra I werden erstmalig in elektronischer Form über das **Studierendenportal** durchgeführt. Sie finden das Studierendenportal über den Link rechtsoben auf der HHU-Homepage. Am Portal loggen Sie sich mit ihrer Universitätskennung ein. Weitere Hinweise finden sich auf der Vorlesungs-Homepage.

Anmeldefristen für die erste und zweite Klausur sind 5.–25.1. bzw. 5.1.–18.3. Nach Ablauf der Anmeldefristen ist es nicht mehr möglich, Anmeldungen entgegenzunehmen. Abmeldungen sind bis eine Woche vor der Prüfung möglich.

Etwa eine Woche vor den Prüfungen wird eine anonymisierte Liste der Studierenden ausgehängt, welche sich angemeldet haben und die Zulassungsvoraussetzungen erfüllen. **Überprüfen Sie, ob Sie dort verzeichnet sind**, da diese Liste am Prüfungstag maßgeblich ist. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt haben, gelten laut PO als nicht angemeldet.