Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

## Blatt 9

**Aufgabe 1.** Sei $K$ ein Körper und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$ Skalare. Wir betrachten das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 4X_3 & + & 3X_4 & = & \gamma_1 \\ X_1 & + & 2X_2 & + & 4X_3 & + & X_4 & = & \gamma_2 \\ X_1 & + & 2X_2 & + & 8X_3 & + & 4X_4 & = & \gamma_3. \end{array}$$

Bestimmen Sie, für welche Vektoren $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in K^3$ das Gleichungssystem eine Lösung hat, und berechnen Sie für diese Vektoren die Lösungsmenge. Geben Sie dabei eine Basis für das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem an.

**Aufgabe 2.** (i) Wählen Sie aus den Vektoren

$$x_1 = (1, 3, 1), \quad x_2 = (2, 6, 2), \quad x_3 = (2, 10, 4), \quad x_4 = (0, 2, 1)$$

eine Basis der linearen Hülle $\sum_{i=1}^{4} \mathbb{Q}x_i \subset \mathbb{Q}^3$.

(ii) Schreiben Sie den Vektor $c = (1, i, -2) \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$y_1 = (1, 2, 0), \quad y_2 = (3, 8, 4), \quad y_3 = (1, 4, 7).$$

(iii) Sind die Vektoren

$$z_1 = (3, 2, 11), \quad z_2 = (1, 1, 2), \quad z_3 = (9, 8, 6)$$

in $(\mathbb{F}_{17})^3$ linear unabhängig?

(Tipp: immer wieder Gauß-Algorithmus)

**Aufgabe 3.** Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$
Wählen Sie eine Basis $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}^3$ so, dass in den Basisvektoren kein einziger Eintrag verschwindet. Berechnen Sie die Matrix $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ zum Endomorphismus
$$A : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3, \quad x \longmapsto Ax$$
bezüglich der gewählten Basis $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}^3$.

**Aufgabe 4.** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass es Endomorphisen $f, g : V \to V$ gibt mit
$$U = \mathrm{Ker}(f) \quad \text{und} \quad U = \mathrm{Im}(g).$$
(Tipp: Basisergänzungssatz)

**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 7.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

**Frohe Weihnachten und guten Rutsch!**