Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap U' = 0$. Schreibe $n = \dim(V)$, $r = \dim(U)$ und $r' = \dim(U')$. Verifizieren Sie, dass es eine Basis

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_r}, \underbrace{x_{r+1}, \ldots, x_{r+r'}}, x_{r+r'+1}, \ldots, x_n \in V$$

gibt, bei der die ersten r Vektoren eine Basis von U und die nächsten r' Vektoren eine Basis von U' bilden.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Untervektorraum $H \subset V$ mit

$$\dim(H) = \dim(V) - 1$$

nennt man auch *Hyperebene*. Sei nun $U \subset V$ ein Untervektorraum und $H \subset V$ eine Hyperebene, welche U nicht enthält. Zeigen Sie mit der Dimensionsformel, dass dann auch

$$H \cap U \subset U$$

eine Hyperebene ist. Skizzieren Sie die Situation für den Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ und $\dim(U) = 2$.

Aufgabe 3. Sei V ein eindlich-dimensionaler K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum und $a \in V$ ein Vektor, der nicht in U enthalten ist. Beweisen Sie mit dem Basisergänzungssatz, dass es eine Hyperebene $H \subset V$ gibt, welche den Untervektorraum U enthält, aber nicht den Vektor a.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Der Vektorraum V ist endlich-dimensional.

(ii) Jede *aufsteigende Kette* von Untervektorräumen

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

in V ist *stationär*. Mit anderen Worten, es gibt einen Index $n \geq 0$ mit

$$U_n = U_{n+1} = U_{n+2} = \dots.$$

(Tipp: Verifizieren Sie zunächst, dass für aufsteigende Ketten von Untervektorräumen die Teilmenge $\bigcup_{i\geq 0} U_i \subset V$ ein Untervektorraum ist.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.