Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, dessen Homologiegruppen

$$H_p(X, \mathbb{Z}), \quad p \geq 0$$

endlich erzeugte Gruppen sind. Folgern Sie, dass dann auch die Kohomologiegruppen $H^p(X, R)$ für alle noetherschen Ringe R endlich erzeugte R-Moduln sind.

Aufgabe 2. Die ganzzahlige Homologie der reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ ist durch

$$H_p(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } p = 0; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < p < n \text{ ungerade;} \\ \mathbb{Z} & \text{falls } p = n \text{ ungerade;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie daraus die Kohomologiegruppen $H^p(\mathbb{RP}^n, R)$ mit beliebigem Koeffizientenring R.

Aufgabe 3. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die kanonische Abbildung

$$H^p(X, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_p(X, R), R)$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $H_n(X, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Es gilt $H^n(X, R) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle Ringe R.

Verifizieren Sie weiterhin, dass dies äquivalent ist zu $H^n(X, \mathbb{F}_p) = 0$ für alle $p > 0$ prim, $n \geq 1$, falls die $H_n(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugte abelsche Gruppen sind.

Abgabe: Bis Montag, den 03.12.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.