Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 12

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die Klasse der endlichen Morphismen alle abgeschlossenen Einbettungen enthält und stabil unter Verkettung und Basiswechsel ist.

(ii) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Morphismen. Angenommen, g ist separiert und $g \circ f$ ist endlich. Folgern Sie, dass dann auch f endlich sein muss.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Grundring, X ein eigentliches Schema, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ eine ample Garbe. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ die offene Teilmenge

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

affin ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und X ein integres projektives k-Schema mit $\mathrm{Pic}(X) = 0$. Deduzieren Sie, dass $X = \mathrm{Spec}(E)$ für eine endliche Körpererweiterung $k \subset E$.

Aufgabe 4. Sei $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus von Ringen. Angenommen, der entsprechende Morphismus von Schemata $f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ ist lokal vom endlichen Typ. Beweisen Sie, dass die R-Algebra A endlich erzeugt ist.

Abgabe: Bis Montag, den 04.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.