Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 12

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper. Rechnen Sie nach, dass es eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_{n+1}(k) \longrightarrow \mathrm{SL}_{n+1}(k) \longrightarrow \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$$

gibt, und verifizieren Sie, dass die induzierte Wirkung von $\mathrm{SL}_{n+1}(k)$ auf dem Schema $\mathbb{P}^n$ eine kanonische Wirkung auf $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1))$ liefert.

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper und

$$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(k).$$

Zeigen Sie, dass die Isotropiegruppe $G_x \subset G$ zu jedem k-wertigen Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ isomorph zum semidirekten Produkt $k^n \rtimes \mathrm{GL}_n(k)$ ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Grundring und $f : \mathbb{P}^n \to \mathrm{Spec}(R)$ der Strukturmorphismus. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f^* : \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_R), \quad L \longmapsto f^*(\widetilde{L})$$

injektiv ist, und ihr Bild ein direkter Summand ist. Folgern Sie, dass im Allgemeinen $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \neq \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei R ein Grundring, A eine R-Algebra, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, und $\bar{A} = A/\mathfrak{a}$ der Restklassenring. Angenommen, der Ring A ist lokal. Zeigen Sie, dass sich jeder Morphismus $\mathrm{Spec}(\bar{A}) \to \mathbb{P}^n$ zu einem $\mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{P}^n$ fortsetzen lässt. Mit anderen Worten: die kanonische Abbildung

$$\mathbb{P}^n(A) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\bar{A})$$

ist surjektiv.

Abgabe: Bis Montag, den 30.04.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.