Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 12

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X ein Schema. Verifizieren Sie, dass der kontravariante Funktor

$$F : (\mathrm{Ring}) \longrightarrow (\mathrm{Set}), \quad R \longmapsto \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Spec}(R))$$

darstellbar ist, und geben Sie das darstellende Objekt an.

Aufgabe 2. Sei R ein Grundring, X ein Schema, $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X, und

$$s = (s_0, \ldots, s_n) : \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}$$

eine Surjektion. Zeigen Sie, dass der resultierende Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^n$ injektiv ist, falls es zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus X es eine Linearkombination $\sigma = \sum \lambda_i s_i$, $\lambda_i \in R$ mit

$$\sigma(x) = 0,\, \sigma(y) \neq 0 \qquad \text{oder} \qquad \sigma(x) \neq 0,\, \sigma(y) = 0$$

gibt.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir bilden die invertierbare Garbe $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$. Betrachte die Basis

$$\sigma_{ij} = T_i T_j \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}), \quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$$

und den zugehörigen Morphismus

$$f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m,$$

wobei $m = \binom{n+2}{n} - 1$. Beschreibe die auf der Menge der k-wertigen Punkte induzierte Abbildung $\mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie dass *Yoneda-Lemma*: Ist $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie, und ist $\hat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren $F : \mathcal{C} \to (\mathrm{Set})$, so ist der Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}, \quad X \longmapsto h_X$$

volltreu.

Abgabe: Bis Montag, den 23.04.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.