Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus und $\mathcal{F}$ eine quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Verifizieren Sie, dass der $\mathcal{O}_Y$-Modul $f_*(\mathcal{F})$ ebenfalls quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X' & \longrightarrow & Z' & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

von Schemata. Angenommen, die drei vertikalen Morphismen f, g, h sind affin. Zeigen Sie, dass dann auch der induzierte Morphismus

$$f \times g : X \times_Z Y \longrightarrow X' \times_{Z'} Y'$$

affin ist.

Aufgabe 3. Sei X ein noethersches, separiertes Schema und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Beweisen Sie, dass es eine Injektion $\mathcal{F} \to \mathcal{A}$ in eine welke quasikohärente Garbe $\mathcal{A}$ gibt.

Aufgabe 4. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Morphismen von Schemata. Angenommen, das Schema Y ist separiert und der Morphismus $g \circ f$ ist affin. Beweisen Sie, dass dann auch f affin sein muss.

Tip: Verifizieren Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & X \times_Z Y \arrow[r, "gf \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"] & Z \times_Z Y = Y \\
Y \arrow[r, "\Delta_Y"'] & Y \times_Z Y, &
\end{tikzcd}$$

kommutative mit cartesischem Quadrat ist, und rekonstruieren Sie damit den Morphismus f aus Δ_Z und $g \circ f$ durch Basiswechsel, Produktbildung und Verkettung.

Abgabe: Bis Montag, den 09.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und Guten Rutsch!