Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein noethersches, separiertes Schema. Verifizieren Sie mittels Čech-Kohomologie, dass es ein $r_0 \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle $r \geq r_0$ und $\mathcal{F}$ quasikohärent.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung, deren Indexmenge I mit einer Totalordnung versehen ist, und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe. Rechnen Sie nach, dass die durch

$$(s_{\alpha_0,\ldots,\alpha_r})_{\alpha_0<\ldots<\alpha_r} \longmapsto (\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i s_{\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_{r+1}}|_{U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{r+1}}})_{\alpha_0<\ldots<\alpha_{r+1}}$$

gegebene Abbildungen

$$d_r : C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad r \geq 0$$

die Eigenschaft $d_{r+1} \circ d_r = 0$ haben.

Aufgabe 3. Sei $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \cup \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ die affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt. Berechnen Sie die Čech-Kohomologiegruppen

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad \text{und} \quad \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^\times),$$

wobei $\mathfrak{U} = (U, V)$ die affine offene Überdeckung ist, welche durch die beiden Kopien der affinen Gerade gegeben sind.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Sei

$$t \in H^0(X, \mathcal{F}'')$$

ein globaler Schnitt, der sich auf einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ zu lokalen Schnitten $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ liften lässt. Rechnen Sie nach, dass die Differenzen

$$r_{\alpha\beta} = s_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} - s_\beta|_{U\alpha\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{F}') \subset \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{F}),$$

aufgefasst als Element in $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}')$, im Kern des Differentials $d_1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}')$ liegt, also ein 1-Kozykel des Čech-Komplex ist.

Abgabe: Bis Montag, den 12.12.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.