Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei R ein lokaler noetherscher Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ sein maximales Ideal. Verifizieren Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = 0$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei H ein Halbring. Konstruieren Sie einen Ring $\tilde{H}$ und einen Homomorphismus von Halbringen $f : H \to \tilde{H}$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem Ring R und jedem Homomorphismus von Halbringen $g : H \to R$ gibt es genau einen Homomorphismus von Ringen $\tilde{g} : \tilde{H} \to R$, welches das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul vom Rang $m \geq 0$, und

$$f : P \longrightarrow P$$

ein Endomorphismus. Wir schreiben $P \oplus Q = R^{\oplus m+n}$ für einen weiteren projektiven R-Modul Q, und betrachten den Endomorphismus

$$F : R^{\oplus m+n} \longrightarrow R^{\oplus m+n}, \quad a + b \longmapsto f(a),$$

wobei $a \in P$ und $b \in Q$. Sei $\chi_F \in R[T]$ das zugehörige charakteristische Polynom von F. Man definiert das charakteristische Polynom von f durch

$$\chi_f = \chi_F / T^n.$$

Zeigen Sie, dass diese rationale Funktion nicht von der Wahl von Q abhängt und tatsächlich ein Polynom ist.

Aufgabe 4. Seien $A \subset B \subset C$ drei Ringerweiterungen. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) C ist ganz über A.

(ii) C ist ganz über B, und B ist ganz über A.

Abgabe: Bis Montag, den 11.07.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.