Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Beschreiben Sie den Träger $\mathrm{Supp}(M) \subset \mathrm{Spec}(R)$ vermöge der Elementarteiler von M.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass das Nakayama-Lemma für Moduln, die nicht endlich erzeugt sind, im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, und

$$x \in \mathrm{Supp}(M).$$

Beweisen Sie, dass es einen nichttrivialen Homomorphismus $M \to R/\mathfrak{p}$ gibt, wobei $\mathfrak{p} \subset R$ das Primideal zum Punkt $x \in \mathrm{Spec}(R)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir betrachten den lokalen Ring

$$R = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \notin p\mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass der R-Modul $M = \mathbb{Q}/R$ nicht noethersch, aber artinsch ist.

Abgabe: Bis Montag, den 06.06.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.