Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, $A = k[T]$ der Polynomring, und $R = k[T^2, T^3]$ der Unterring aller Polynome ohne linearen Term. Verifizieren Sie, dass für jedes $f \in (T^2, T^3)$ die kanonische Abbildung

$$\varphi : R_f \longrightarrow A_f, \quad \frac{g}{f^n} \longmapsto \frac{g}{f^n}$$

zwischen den Lokalisierungen bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\varphi : M \to N$ eine lineare Abbildung zwischen R-Moduln. Angenommen,

$$\operatorname{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n), \quad f_i \in R$$

ist eine offenen Überdeckung des Spektrums. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung φ bijektiv ist genau dann, wenn die induzierten Abbildungen auf den Lokalisierungen

$$\varphi_i : M_{f_i} \longrightarrow N_{f_i}, \quad \frac{a}{f_i^n} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{f_i^n}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n$ bijektiv sind.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper und $R = k[T_1, T_2]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ und die offenen Teilmenge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2) = \{x_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \neq (T_1, T_2)\}.$$

Beweisen Sie, dass die Restriktionsabbildung

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

bijektiv ist. Folgern Sie, dass die offene Menge U nicht von der Form $D(f)$, $f \in R$ ist.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie explizit die stetige Abbildung

$$f : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[T]),$$

welche durch die kanonische Inklusion $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induziert wird.

Abgabe: Bis Montag, den 30.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.