Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

# Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

## Blatt 4

**Aufgabe 1.** Sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz. Verifizieren Sie, dass der Raum

$$X = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q[T])$$

unendlich viele Punkte enthält.

**Aufgabe 2.** Sei $R$ ein Ring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, und $\mathfrak{p}_i \subset R$, $i \in I$ die Familie aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ enthalten. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i.$$

**Aufgabe 3.** Beschreiben Sie den topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[T])$ sowie die durch die Inklusion $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induzierte stetige Abbildung

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[T])$$

in expliziter Weise.

**Aufgabe 4.** Sei $R$ ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$. Beweisen Sie, dass der topologische Raum $X$ genau dann zusammenhängend ist, wenn für alle $f, g \in R$ mit

$$f + g = 1, \quad f^2 = f, \quad g^2 = g$$

bereits $f = 0, g = 1$ oder $f = 1, g = 0$ gelten muss.

**Abgabe:** Bis Montag, den 16.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.