Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Welche der folgenden Teilmengen sind algebraisch, welche nicht?

- Der Einheitskreis in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.
- Der Einheitskreis in $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.
- Der Kern der komplexen Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.
- Ein Intervall in $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper und $\sigma : k \to k$ ein Körperautomorphismus. Zeigen Sie, dass mit jeder algebraischen Teilmenge $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ auch die Teilmenge

$$\sigma(X) = \{(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in X\} \subset \mathbb{A}^n(k)$$

algebraisch ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper und $m, n \geq 0$ natürliche Zahlen. Wir identifizieren den affinen mn-Raum $\mathbb{A}^{mn}(k) = k^{mn}$ mit der Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus k. Zeigen Sie, dass die Menge

$$X_r \subset \mathbb{A}^{mn}(k)$$

aller Matrizen B vom Rank $\operatorname{rank}(B) < r$ algebraisch ist.

Aufgabe 4. Sei $a = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Finden Sie ein geeignetes Polynom $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$V(g) = \{a\}\,.$$

Folgern Sie daraus, dass *jede* algebraische Teilmenge $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ von der Form $X = V(f)$ für ein geeignetes Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 22.10. um 9:15 Uhr in den Zettelkästen.

Semesterapparat:

Klaus Hulek: Elementare algebraische Geometrie.
Vieweg, Braunschweig, 2000.

Miles Reid: Undergraduate algebraic geometry.
Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Egbert Brieskorn, Horst Knörrer: Ebene algebraische Kurven.
Birkhäuser, Basel, 1981.

Brendan Hassett: Introduction to algebraic geometry.
Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Ernst Kunz: Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie. Vieweg, Braunschweig, 1980.

Christian Peskine: An algebraic introduction to complex projective geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Karen Smith, et al.: An invitation to algebraic geometry.
Springer, New York, 2000.

William Fulton: Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.
Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

Robin Hartshorne: Algebraic geometry.
Springer, New York, 1977.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist quasikompakt.

(ii) Jede aufsteigende Folge $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ von offenen Teilmengen ist stationär.

Topologische Räume mit diesen äquivalenten Eigenschaften bezeichnet man als *noethersch*.

Aufgabe 2. Seien k ein Körper und $n \geq 2$. Verifizieren Sie, dass es keine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ gibt, die surjektiv sowie stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Es gibt demnach keine raumfüllende Kurven bezüglich der Zariski-Topologie.

Aufgabe 3. Sei R ein integrer Ring, in dem die *absteigende Kettenbedingung* gilt, also jede absteigende Folge von Idealen $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots$ stationär ist. Zeigen Sie, dass dann R ein Körper sein muss.

Tip: Betrachten sie absteigende Ketten der Form $\mathfrak{a}_i = (a^i)$, um zu zeigen, dass ein Element $a \in R$, $a \neq 0$ invertierbar ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{A}^n(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ dicht bezüglich der Zariski-Topologie ist. Mit anderen Worten: Die einzige abgeschlossene Teilmenge, welche $\mathbb{A}^n(\mathbb{Q})$ enthält, ist der gesamte affine n-Raum über $\mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Freitag, den 29.10. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie jeweils das Radikal $\sqrt{(f)}$ zu folgenden Hauptidealen $(f) \subset R$:

(i) Im Ring $R = \mathbb{Z}$ mit $f = 1728$.

(ii) Im Ring $R = \mathbb{C}[X]$ mit $f = X^3 - iX^2 + X - i$.

(iii) Im Ring $R = \mathbb{R}[X]$ mit $f = X^2 + X + 1$.

(iv) Im Ring $R = \mathbb{C}[X, Y]$ mit $f = X^4 - XY^3 - YX^3 + Y^4$.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Basissatz, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \iff f^n \in \mathfrak{a}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist. Mit anderen Worten: Jede aufsteigende Folge von offenen Teilmengen $U_0 \subset U_1 \subset \ldots$ ist stationär.

Aufgabe 4. Sei k algebraisch abgeschlossen, und $f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ zwei Polynome. Angenommen, die Verschwindungsmenge $V(g) \subset \mathbb{A}^n(k)$ enthält $V(f)$, und das Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ist irreduzibel. Folgern Sie mit dem Hilbertsche Nullstellensatz, dass f ein Teiler von g ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 05.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und

$$f = aX^2 + bX + c \quad \text{und} \quad g = a'X^2 + b'X + c'$$

zwei quadratische Polynome über R. Verifizieren Sie die Formel

$$\operatorname{res}(f, g) = (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')(ba' - ab').$$

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Das *Produktideal* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset R$ ist das von den Produkten fg mit $f \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{b}$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Folgern Sie daraus, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt:

$$V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

als Teilmengen im $\mathbb{A}^n(k)$.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Wir identifizieren den affinen n-Raum $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Menge der normierten Polynome $f \in k[Y]$ vom Grad $\deg(f) = n$, vermöge

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Sei U die Menge aller *separablen Polynome*, also solchen, die über dem algebraischen Abschluss $k \subset \bar{k}$ keine multiplen Wurzeln haben. Zeigen Sie mit Hilfe der Resultante, dass $U \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine offene Teilmenge ist.

Aufgabe 4. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei geordnete Mengen, und $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $I : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwei Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

- Die beiden Abbildungen V und I sind *monoton fallend*, mit anderen Worten, $a \leqslant a' \Rightarrow V(a) \geqslant V(a')$ und $b \leqslant b' \Rightarrow I(b) \geqslant I(b')$.
- Die beiden Verkettungen VI und IV sind *ansteigend*, das heisst $a \leqslant IV(a)$ und $b \leqslant VI(b)$.

Folgern Sie daraus, dass die Abbildungen V und I zueinander inverse Bijektionen zwischen den Bildern $V(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und $I(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ induzieren. Erörtern Sie diese Tatsache im Kontext der Galois-Theorie sowie der Algebraischen Geometrie.

Abgabe: Bis Freitag, den 12.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie den singulären Ort $\mathrm{Sing}(C)$ der komplexen Kurven $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, die durch folgende Polynome gegeben werden:

(i) $X^4 - Y^4 + X^3Y^2$

(ii) $X^n + Y^n + nXY + (n-2)$.

Aufgabe 2. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die durch das ganzzahlige Polynom $f = X^n - 1 - Y^2$ definierte Kurve $C_p \subset \mathbb{A}^2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ glatt?

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$ ein ganzzahliges Polynom, und $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ sowie $C_p \subset \mathbb{A}^2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ die dadurch definierten Kurven. Angenommen, die komplexe Kurve C is glatt. Beweisen Sie, dass für fast alle Primzahlen $p > 0$ auch die Kurven C_p glatt sind.

Aufgabe 4. Sei $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ die Kurve, welche durch das reduzible Polynom

$$f = X^3Y - Y^2 = (X^3 - Y)Y$$

definiert wird. Bestimmen Sie den Umgebungsrand $L(C, 0)$ der Kurve C am Nullpunkt $0 = (0, 0)$ als Verschlingung in der 3-Sphäre.

Abgabe: Bis Freitag, den 19.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein unendlicher Körper, und $g_1, \ldots, g_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ endlich viele Polynome mit $g_1, \ldots, g_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein Punkt $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ gibt mit

$$g_i(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aufgabe 2. Sei $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ eine Kurve, gegeben durch ein quadratfreies $f \in k[X, Y]$, und $x = (a, b) \in C$. Angenommen, das Polynom f wird als formale Potenzreihe in $X - a$, $Y - b$ reduzibel. Zeigen Sie, dass dann $x \in \operatorname{Sing}(C)$ gilt.

Aufgabe 3. Beweisen Sie für jeden rationalen Exponenten $r \in \mathbb{Q}$, dass

$$(1 + X)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} X^i$$

im formalen Potenzreihenring $\mathbb{Q}[[X]]$ gilt. Hierbei ist der Binomialkoeffizient für $r \in \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{N}$ definiert als

$$\binom{r}{i} = \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{i!} \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $f \in R[[X, Y]]$ eine formale Potenzreihe mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $d \geq 1$ gibt mit der Eigenschaft $f(T^d, T) \neq 0$.

Abgabe: Bis Freitag, den 26.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Für welche komplexe Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$ ist die durch die Gleichung

$$Y^2 = X^3 + AX + B$$

definierte Kurve $E \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ glatt?

Aufgabe 2. Sei $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ eine Kurve. Zeigen Sie, dass C als Teilmenge von $\mathbb{C}^2$ nicht beschränkt, also bezüglich der klassischen Topologie nicht kompakt ist.

Aufgabe 3. Sei T ein nichtleerer noetherscher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass es endlich viele offene disjunkte zusammenhängende nichtleere Teilmengen $T_1, \ldots, T_n \subset T$ gibt mit $T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$.

Aufgabe 4. Seien k, k' zwei algebraisch abgeschlossene Körper, sowie

$$C \subset \mathbb{A}^2(k) \quad \text{und} \quad C' \subset \mathbb{A}^2(k')$$

zwei irreduzible Kurven. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Homöomorphismus $f : C \to C'$ gibt, wenn $\mathrm{Card}(k) = \mathrm{Card}(k')$ gilt. (Tip: irreduzible Kurven tragen die Topologie der endlichen Komplemente.)

Abgabe: Bis Freitag, den 03.12. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Welche 2-Mannigfaltigkeit ist hier abgebildet?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Anzahl $r \geq 1$ der Äquivalenzklassen von Ecken im regulären 8-Eck zum Flächenwort

$$abcda^{-1}b^{-1}d^{-1}c^{-1},$$

und berechnen Sie die Euler-Charakteristik $e(T) \in \mathbb{Z}$ zur zugehörigen kompakten zusammenhängenden triangulierbaren 2-Mannigfaltigkeit T.

Aufgabe 3. Sei M_2 der Monoid der kompakten zusammenhängenden topologischen 2-Mannigfaltigkeiten. Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$\gamma : M_2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [T] \longmapsto 2 - e(T)$$

ein Homomomorphismus von Monoiden ist (die verbundene Summe $T\#T'$ von 2-Mannigfaltigkeiten wird also in die Addition $\gamma(T) + \gamma(T')$ überführt). Was sind Bild und Kern? Ist die Abbildung injektiv?

Aufgabe 4. Bringen Sie das Flächenwort $aba^{-1}b$ durch explizite Schneide/Klebe-Schritte auf Normalform a^2b^2 (Kleinsche Flasche $= P^2\#P^2$).

Abgabe: Bis Freitag, den 10.12. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Zeichnen Sie für das Flächenwort

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$$

das Bild der Randkanten des entsprechenden regulären 8-Ecks in der zugehörigen 2-Mannigfaltigkeit $T = T^2 \# T^2$.

Aufgabe 2. Sei (V, K) ein endlicher simplizialer Komplex, C^i der zugehörige $\mathbb{Q}$-Vektorraum der i-Koketten, und $\partial : C^i \to C^{i+1}$ die durch die Formel

$$\partial(f)[x_0, \ldots, x_{i+1}] = \sum_{r=0}^{i+1} (-1)^r f[x_0, \ldots, \widehat{x}_r, \ldots, x_{i+1}]$$

gegebene Korandabbildung. Rechnen Sie nach, dass die Verkettung

$$C^{i-1} \xrightarrow{\partial} C^i \xrightarrow{\partial} C^{i+1}$$

die Nullabbildung ist.

Aufgabe 3. Sei K ein endlicher simplizialer Komplex von Dimension 2. Seien $e = e(K)$ und $b_i = k_i(K)$, $i = 0, 1, 2$ seine Euler-Charakteristik bzw. Betti-Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$e = b_0 - b_1 + b_2.$$

Tip: Betrachten Sie die Korandabbildungen

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} C^3 \longrightarrow 0$$

und verifizieren Sie mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass die Wechselsumme e der Dimensionen $\dim_{\mathbb{Q}}(C^i)$ mit der Wechselsumme der Dimensionen $b_i = \dim_{\mathbb{Q}}(Z^i/B^i)$ übereinstimmt. Verallgemeinerung?

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{P}^n(k) \longrightarrow \left\{ H \subset k^{n+1} \mid H \subset k^{n+1} \text{ Hyperebene} \right\},$$

welche ein $(\lambda_0 : \ldots : \lambda_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ auf den Kern der durch die $1 \times (n+1)$-Matrix

$$A = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$$

beschriebenen linearen Abbildung $A : k^{n+1} \to k$ schickt, wohldefiniert und bijektiv ist. Erinnerung: Eine *Hyperebene* ist ein Untervektorraum von Kodimension eins.

Abgabe: Bis Freitag, den 17.12. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring, der integer ist, und $f \in S$, $f \neq 0$ ein homogenes Element. Zeigen Sie, dass dann auch jeder Teiler von f homogen ist.

Aufgabe 2. Sei $S = k[X, Y, Z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten.

(i) Wir versehen S zunächst mit der Standardgraduierung. Bestimmen Sie die Vektorraumdimensionen $\dim_k(S_d)$ für $0 \leqslant d \leqslant 10$.

(ii) Sei nun S mit der Graduierung ausgestattet, welche durch

$$\deg(X) = 1, \quad \deg(Y) = 2, \quad \text{und} \quad \deg(Z) = 3$$

gegeben ist. Berechnen Sie auch in diesem Fall $\dim_k(S_d)$ für $0 \leqslant d \leqslant 10$.

Aufgabe 3. Seien $F_0, \ldots, F_n \in k[X_0, \ldots, X_m]$ homogene Elemente mit festem Grad $d > 0$ so, dass

$$V(F_0, \ldots, F_n) = \{(0, \ldots, 0)\}$$

als Teilmenge vom $\mathbb{A}^{m+1}(k)$. Zeigen Sie, dass die durch

$$(a_0 : \ldots : a_m) \longrightarrow (F_0(a_0, \ldots, a_m), \ldots, F_n(a_0, \ldots, a_m))$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung, und $\mathfrak{a} \subset S_+$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$V_+(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n(k)$$

leer ist genau dann, wenn $\mathfrak{a}$, aufgefasst als Untervektorraum des k-Vektorraumes S, von endlicher Kodimension ist.

Abgabe: Bis Montag, den 10.01.2011 um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass die Weierstraß-Gleichung

$$y^2 + y = x^3 + x + 1$$

keine Nullstelle in $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$ besitzt, aber die zugehörige homogene Weierstrass-Gleichung eine Nullstelle in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat.

Aufgabe 2. Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitunge $f_i = \partial f/\partial X_i$ ebenfalls homogen sind, und dass

$$d \cdot f = X_0 f_0 + \ldots + X_n f_n$$

(Euler-Relation).

Aufgabe 3. Sei $f \in k[x, y]$ ein Polynom, das genau ein Monom vom Grad $d = \deg(f)$ entält. Beweisen Sie, dass die Homogenisierung $f \in k[X, Y, Z]$ bezüglich $x = X/Z$ und $y = Y/Z$ mindestens eine und höchstens zwei Nullstelle auf

$$V_+(Z) \subset \mathbb{P}^2(k)$$

besitzt.

Aufgabe 4. Sei $g \in k[X_0, \ldots, X_n]_+$ ein homogenes Polynom, und $f \in k[Z_1, \ldots, Z_n]$ seine Dehomogenisierung bezüglich $Z_i = X_i/X_0$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) g irreduzibel $\Rightarrow$ f irreduzibel.

(ii) f irreduzibel $\Rightarrow$ g irreduzibel.

Abgabe: Bis Freitag, den 14.01. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $f \in k[X, Y, Z]_+$ homogen und $g \in k[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}]$ seine Homogenisierung bezüglich Z. Rechnen Sie nach, dass die Homogenisierung der partiellen Ableitung $\partial f/\partial X$ mit der partiellen Ableitung $\partial g/\partial \frac{X}{Z}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik $p > 0$, mit Primkörper $\mathbb{F}_p \subset k$, und $d \geq 1$ eine ganze Zahl. Wieviele verschiedene algebraische Mengen $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ der Form

$$C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2(k)$$

gibt es, wobei f ein homogenes Polynom vom Grad d mit Koeffizienten aus dem Primkörper $\mathbb{F}_q$?

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die abgeschlossene Teilmenge

$$C = V_+(XY + Z^2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

auf den drei offenen Teilmengen $D_+(X), D_+(Y), D_+(Z)$ und beschreiben Sie den Raum C in der klassischen Topologie.

Aufgabe 4. Sei $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Quadrik. Angenommen, es gibt einen Punkt

$$x = (a : b : c) \in C,$$

mit homogenen Koordinaten $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass es dann unendlich viele solcher Punkte gibt.

Abgabe: Bis Freitag, den 21.01. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.