Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass die Weierstraß-Gleichung

$$y^2 + y = x^3 + x + 1$$

keine Nullstelle in $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$ besitzt, aber die zugehörige homogene Weierstrass-Gleichung eine Nullstelle in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat.

Aufgabe 2. Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitunge $f_i = \partial f / \partial X_i$ ebenfalls homogen sind, und dass

$$d \cdot f = X_0 f_0 + \ldots + X_n f_n$$

(Euler-Relation).

Aufgabe 3. Sei $f \in k[x, y]$ ein Polynom, das genau ein Monom vom Grad $d = \deg(f)$ entält. Beweisen Sie, dass die Homogenisierung $f \in k[X, Y, Z]$ bezüglich $x = X/Z$ und $y = Y/Z$ mindestens eine und höchstens zwei Nullstelle auf

$$V_+(Z) \subset \mathbb{P}^2(k)$$

besitzt.

Aufgabe 4. Sei $g \in k[X_0, \ldots, X_n]_+$ ein homogenes Polynom, und $f \in k[Z_1, \ldots, Z_n]$ seine Dehomogenisierung bezüglich $Z_i = X_i/X_0$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) g irreduzibel $\Rightarrow$ f irreduzibel.

(ii) f irreduzibel $\Rightarrow$ g irreduzibel.

Abgabe: Bis Freitag, den 14.01. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.