Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist quasikompakt.

(ii) Jede aufsteigende Folge $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ von offenen Teilmengen ist stationär.

Topologische Räume mit diesen äquivalenten Eigenschaften bezeichnet man als *noethersch*.

Aufgabe 2. Seien k ein Körper und $n \geq 2$. Verifizieren Sie, dass es keine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ gibt, die surjektiv sowie stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Es gibt demnach keine raumfüllende Kurven bezüglich der Zariski-Topologie.

Aufgabe 3. Sei R ein integrer Ring, in dem die *absteigende Kettenbedingung* gilt, also jede absteigende Folge von Idealen $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots$ stationär ist. Zeigen Sie, dass dann R ein Körper sein muss.

Tip: Betrachten sie absteigende Ketten der Form $\mathfrak{a}_i = (a^i)$, um zu zeigen, dass ein Element $a \in R$, $a \neq 0$ invertierbar ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{A}^n(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ dicht bezüglich der Zariski-Topologie ist. Mit anderen Worten: Die einzige abgeschlossene Teilmenge, welche $\mathbb{A}^n(\mathbb{Q})$ enthält, ist der gesamte affine n-Raum über $\mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Freitag, den 29.10. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.