Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Finden Sie das kleinste $n \geq 1$, für das die kommutative Gruppe

$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Aut}(C_n)$$

nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Untergruppen

$$S, D \subset T \subset \mathrm{GL}(n, K),$$

wobei T die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen, D die Gruppe aller Diagonalmatrizen, und S die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen $\lambda_{ii} = 1$. Zeigen Sie, dass $T = S \rtimes_\varphi D$ ein semidirektes Produkt ist, und bestimmen die den Homomorphismus $\varphi : D \to \mathrm{Aut}(S)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass für jede Gruppe G das Folgende gilt:

$$\mathrm{ord}(G) > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}\,.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die Quaternionengruppe

$$Q = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm IJ\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

(i) Bestimmen Sie alle Untergruppen $P \subset Q$, und entscheiden Sie, welche davon normal sind.

(ii) Ist die Gruppe Q isomorph zu einem semidirekten Produkt $H \rtimes_\varphi K$ für gewisse Gruppen $H, K \neq \{e\}$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.