

## Übungen $p$ -adische Zahlen

### Blatt 1

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die ersten fünf Ziffern  $a_0, \dots, a_4$  der ganzen  $p$ -adischen Zahl

$$\frac{1 + p + p^2}{p - 1} = \sum_{i \geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p,$$

für die Primzahlen  $p = 2, 3, 5$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$  eine ganze  $p$ -adische Zahl. Zeigen Sie, daß  $a$  genau dann in der Teilmenge  $\{-1, -2, -3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_p$  enthalten ist, wenn für fast alle Koeffizienten  $a_i = p - 1$  gilt.

**Aufgabe 3.** Verifizieren Sie, daß die Einheitengruppe  $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$  des Körpers der  $p$ -adischen Zahlen isomorph zur Gruppe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^\times$  ist.

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie, daß die Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$  unendlichen Grad hat, also  $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_p) = \infty$ .

**Abgabe:** Bis Montag den 26.10. um 11:00 Uhr in den Zettelkasten.

**Leistungspunkte:** Bei Bestehen der Prüfung zur Lehrveranstaltung werden 9 Leistungspunkte vergeben. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie als Prüfungsvorleistung regelmäßig am Übungsbetrieb teilnehmen und 20% der möglichen Punkte auf den Übungszetteln erreichen. Die Prüfung wird als mündliche Prüfung zum Ende der Vorlesungszeit oder zum Ende des Semesters durchgeführt.