Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Mat}(n, K)$ die Äquivalenzrelation

$$B \sim A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } S, T \in \mathrm{GL}(n, K) \text{ mit } B = SAT^{-1}.$$

Sei X die Menge der Äquivalenzklassen. Sind die Abbildungen

$$X \longrightarrow K, \quad [A] \longmapsto \mathrm{Tr}(A) \quad \text{und} \quad X \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [A] \longmapsto \mathrm{rank}(A)$$

wohldefiniert?

Aufgabe 2. Sei $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ der reelle Untervektorraum aller Hermiteschen Matrizen, und $D \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ der Untervektorraum aller Diagonalmatrizen. Berechnen Sie die Dimension der $\mathbb{R}$-Vektorräume $(H + D)/D$ und $(H + D)/H$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum. Ein Untervektorraum $H \subset V$ bezeichnet man als *Hyperebene* falls $\dim(V/H) = 1$ gilt. Zeigen Sie, daß jeder Untervektorraum $U \subset V$ als Durchschnitt von Hyperebenen geschrieben werden kann.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir fassen den Summenvektorraum

$$S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K \text{ und } \lambda_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$$

in kanonischer Weise als Untervektorraum des Produktvektorraumes

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K\}$$

auf. Beweisen Sie, daß der Quotientenvektorraum $V = P/S$ unendlich-dimensional ist. (Tip: Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : V \to V$, der surjektiv aber nicht injektiv ist.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 6.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.