Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 12

Aufgabe 1. Angenommen $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann lassen sich $x =: x_{i_0}$ bzw. $y =: y_{j_0}$ zu einer Basis $(x_i)_{i \in I}$ von V bzw. zu einer Basis $(y_j)_{j \in J}$ von W ergänzen. Nach Konstruktion des Tensorproduktes bildet die Familie $(x_i \otimes y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere ist sie linear unabhängig, so dass $x_{i_0} \otimes y_{j_0} \neq 0$ gelten muss.

Ist umgekehrt $x \otimes y \neq 0$, so existiert eine Linearform $\varphi\colon V \otimes W \to K$ mit $\varphi(x \otimes y) \neq 0$. Dann ist die Verknüpfung $V \times W \xrightarrow{\iota} V \otimes W \xrightarrow{\varphi} K$ eine Bilinearform, welche in (x, y) nicht verschwindet, da die kanonische Abbildung ι durch $\iota(x, y) = x \otimes y$ definiert ist. Diese wäre ein Widerspruch im Fall $x = 0$ und $y = 0$, also muss $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gelten.

Aufgabe 2. Der Endomorphism $f \otimes g\colon V \otimes W \to V \otimes W$ ist durch

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(x)$$

und entsprechende lineare Ausdehnung festgelegt. D.h für einen beliebigen Vektor $\sum_{i \in I} \lambda_i \, x_i \otimes y_i$ mit endlicher Indexmenge I und Vektoren $x_i \in V$, $y_i \in W$ gilt

$$(f \otimes g)(\sum_{i \in I} \lambda_i \, x_i \otimes y_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, f(x_i) \otimes f(y_i).$$

Es folgt daher für die n-fache Verkettung induktiv

$$(f \otimes g)^n = f^n \otimes g^n.$$

Angenommen f ist nilpotent. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0_V$, so folgt $(f \otimes g)^n = 0_V \otimes g^n$. Dies ist die Nullabbildung, da $x \otimes y$ auf den Vektor $0_V \otimes g^n(x)$ abgebildet wird, welcher nach Aufgabe gleich $0_{V \otimes W}$ ist. Analog argumentiert man im Fall, dass g nilpotent ist.

Nehmen wir umgekehrt die Nilpotenz von $f \otimes g$ an, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = (f \otimes g)^n = f^n \otimes g^n$. Im Fall $f^n = 0$ ist f nilpotent. Andernfalls gibt es ein $x \in V$ mit $f^n(x) \neq 0$ und es folgt für alle $y \in W$

$$0 = f^n \otimes g^n(x \otimes y) = f^n(x) \otimes g^n(y).$$

Nach Aufgabe 1 gilt $g^n(y) = 0$, also ist g nilpotent.

Aufgabe 3. Sei $e_1, e_2 \in K^2$ die Standardbasis von K^2. Dann bilden $e_{ij} := e_i \otimes e_j$ für $1 \leq i, j \leq 2$ eine Basis von $K^2 \otimes K^2$. Wir wählen die lexikographische Ordnung auf der Indexfamilie $\{1,2\} \times \{1,2\}$ und erhalten so die Abzählung $(x_k)_{k=1,\ldots 4} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$. Durch Abbildung auf die Standardbasis des K^4 erhält führt dies zu einem Isomorphismus $\varphi\colon K^2 \otimes K^2 \xrightarrow{\simeq} K^4$.

Die Abbildungsmatrix $A' \in \mathrm{Mat}(4, K)$ von A ist dann nach Vorlesung

$$A' = \begin{pmatrix} 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

(Dies gilt natürlich nur für die lexikographische Ordnung der Basis $(e_i \otimes e_j)_{1 \leq i,j \leq 2}$!)

Nun zu der Bestimmung Jordan-Normalform J. Wir sehen, dass $\lambda = 12$ der einzige Eigenwert von A' ist. Also ist $N = A' - 12E$ nilpotent und es gilt

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Bezeichnet b_i die Anzahl der $i \times i$-Jordanblöcke, so gilt nach Vorlesung

$$\mathrm{rk}(N^i) = b_{i+1} + 2b_{i+2} + \cdots .$$

Es folgt $b_k = 0$ für $k \geq 4$. Für kleinere k müssen wir anhand der Charakteristik von K fallweise unterscheiden:

- $p \geq 5$: Wegen $\mathrm{rk}\, N^2 = 1$ ist $b_3 = 1$. Es folgt $b_2 = 0$, $b_1 = 1$ und daher

$$J = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

- $p = 3$: Wegen $\mathrm{rk}\, N^2 = 0$ ist $b_3 = 0$ und $\mathrm{rk}\, N = 2$ impliziert $b_2 = 2$. Also folgt $b_1 = 0$ und damit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $p = 2$: Es gilt $\mathrm{rk}\, N^2 = 0$ und $\mathrm{rk}\, N = 1$. Also ist $b_2 = 1$ und folglich $b_1 = 4 - 2b_2 = 2$. Wir erhalten

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Angenommen, für die Adjungierte von f gilt $f^* = p(f)$ für ein Polynom $f = \sum_{i=0}^d a_i T^i \mathbb{C}[T]$. Dann ist f normal, weil

$$ff^* = f\sum_{i=0}^d a_i f^i = \sum_{i=0}^d a_i f^{i+1} = \left(\sum_{i=0}^d a_i T^i\right) f = f^* f.$$

Sei umgekehrt f als normal angenommen. Nach Vorlesung existiert eine Orthonormalbasis $x_1, \dots x_n$ von Eigenvektoren. Dann ist $\mathrm{Mat}_x^x(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$ eine mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besetzte Diagonalmatrix und die Gram-Matrix $G = \Phi(x_i, x_j)_{ij}$ der hier verwendeten Standardsesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ ist gleich $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

Ist nun $p \in \mathbb{C}[T]$ ein beliebiges Polynom, so ist genau dann $f^* = p(f)$, wenn gilt

$$\mathrm{Mat}_x^x(f^*) = \mathrm{Mat}_x^x(p(f)) = p(\mathrm{Mat}_x^x(f)) = p(D) = \mathrm{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)).$$

Nach Vorlesung ist die Matrix von f^* in der Basis x gleich

$$\mathrm{Mat}_x^x(f^*) = \overline{G^{-1}\,\mathrm{Mat}_x^x(f)\overline{G}} = \overline{D}^t = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n),$$

also müssen wir ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit der Eigenschaft $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ wählen. Das geht wie folgt: Wir können nach Umnummerierung OE annehmen, dass die λ_i paarweise verschieden sind. Definiert man die Polynome

$$p_j(T) = \frac{\prod_{i \neq j}(T - \lambda_i)}{\prod_{i \neq j}(\lambda_j - \lambda_i)},$$

so gilt $p_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$. Also ist das gesuchte Polynom

$$p = \bar{\lambda}_1 p_1 + \cdots + \bar{\lambda}_n p_n.$$