Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 8

Aufgabe 1. Nach Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i)x_i^* \\ &= (1+\imath)^0 x_0^* + (1+\imath)^1 x_1^* + (1+\imath)^2 x_2^* + (1+\imath)^3 x_4^* \\ &= x_0^* + (1+\imath)x_1^* + 2\imath x_2^* + (2\imath - 2)x_3^*. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

(i) Die Matrix G ist symmetrisch, weil

$$G^t = (S^tS)^t = S^t(S^t)^t = S^tS = G$$

(ii) Jede symmetrische Matrix $G \in \mathrm{GL}(n, K)$ definiert auf K^n eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $\Phi\colon K^n \times K^n \to K$, $(x, y) \mapsto x^tGy$. Nach Vorlesung existiert wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$ eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ von K^n, so dass die Gram-Matrix $A = (\Phi(x_i, x_j)_{ij})$ Diagonalgestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Laut Voraussetzung gibt es $\mu_i \in K$ mit $\lambda_i = \mu_i^2$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

hat folglich die Eigenschaft $D^tD = D^2 = A$. Sei $T \in \mathrm{GL}(n, k)$ die Matrix, welche die Basis-Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ als Spalten enthält. Sie ist durch die Eigenschaft $Te_i = x_i$ charakterisiert, wobei $e_1, \ldots, e_n \in V$ die Standard-Basis von K^n bezeichne. Nach Definition von A und Φ gilt nun für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$e_i^tAe_j = \Phi(x_i, x_j) = x_i^tGx_j = (Te_i)^tGTe_j = e_i^tT^tGTe_j$$

woraus $A = T^tGT$ folgt. Setzt man $S = DT^{-1}$, so erhält man schließlich

$$G = (T^t)^{-1}T^tGTT^{-1} = (T^t)^{-1}AT^{-1} = (T^{-1})^tD^tDT^{-1} = (Dt^{-1})^tDT^{-1} = S^tS$$

Aufgabe 3.
Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existiert für jede Äquivalenzklasse genau ein Repräsentant in der folgenden Normalform

$$I(n_1, n_{-1}, n_0) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei n_k für $k = 1, -1, 0$ die Anzahl der Einträge mit Wert k bezeichne. Die gesuchte Anzahl von Äquivalenzklassen entpricht daher der Anzahl solcher Matrizen und ist somit gleich der Mächtigkeit von

$$\mathcal{N} = \{(n_1, n_{-1}, n_0) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq n_k \leq n \text{ und } n_1 + n_{-1} + n_0 = n\}$$

Wir zählen wie folgt: Für $n_1 \in \{0, \ldots, n\}$ gibt es $n+1$ Möglichkeiten. Ist n_1 gewählt, so gibt es für $n_{-1} \in \{0, \ldots, n - n_1$ noch $n - n_1 + 1$ Kombinationen. Für gewählte n_1 und n_{-1} ist dann $n_0 = n - n_1 - n_{-1}$ eindeutig bestimmt. Wir zählen also

$$\begin{aligned} A(n) = \sum_{(n_1, n_{-1}, n_0) \in \mathcal{N}} 1 &= \sum_{n_1=0}^{n} n - n_1 + 1 \\ &= (n+1)(n+1) - \sum_{n_1=0}^{n} n_1 \\ &= (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)(n+1-\frac{n}{2}) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Teilmenge $\mathcal{N}$ ist der Schnitt einer Ebene mit einem Kubus der Seitenlänge $n+1$. Also wächst ihr Volumen $A(n)$ sicherlich quadratisch in n. Das Polynom $A(n)$ ist daher durch die Werte $A(0) = 1$, $A(1) = 3$ und $A(2) = 6$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4. Zuerst mache man sich die Vektorraumstruktur auf B bewusst!
Jedes Skalarprodukt $\alpha \in U$ ist nach Definition bilinear und symmetrisch, also in S enthalten. Da S ein Untervektorraum von B ist, sind auch alle Linearkombinationen von Elementen in S wieder in S enthalten. Insbesondere gilt dies für Linearkombinationen von Skalarprodukten und wir schließen, dass das Erzeugnis U in S enthalten ist.

Der auszustehende Beweis der Inklusion $U \supset S$ ist nicht ganz so leicht, da eine symmetrische Bilinearform $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{R}$ nicht unbedingt ein Skalarprodukt ist. Wir müssen zeigen, dass sich α aber immer als Linearkombination von Skalarprodukten schreiben läßt.

Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existiert eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V, so dass die Gram-Matrix von α die folgende Normalform besitzt:

$$A = (\alpha(x_i, x_j)_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

Definiert man die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 2 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 2 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& 2 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

so gilt $A = B - C$. Die bilinearen Abbildungen $\beta, \gamma\colon V \times V \to \mathbb{R}$, welche durch $\beta(x_i, x_j) = B_{ij}$ bzw. $\gamma(x_i, x_j) = C_{ij}$ definiert sind, sind offensichtlich symmetrisch und bilinear, aber auch nicht ausgeartet, da $x_1, \ldots, x_n$ bezüglich β und γ einer Orthogonalbasis bilden; per Definition sind daher β und γ Skalarprodukte. Nun gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$\alpha(x_i, x_j) = A_{ij} = B_{ij} - C_{ij} = \beta(x_i, x_j) - \gamma(x_i, x_j) = (\beta \underset{B}{-} \gamma)(x_i, x_j)$$

also auch $\alpha(x, y) = (\beta - \gamma)(x, y)$ für alle $x, y \in V$, da $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V ist und α wie $\beta - \gamma$ bilinear sind. Dies zeigt $\alpha = \beta - \gamma$, d.h. α ist eine Linearkombination von zwei Skalarprodukten und damit in U enthalten.