Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 6

Aufgabe 1. Bezeichne $\mathrm{Mat}(n, K)$ mit V. Es gilt $f^2 = \mathrm{Id}_V$, also teilt das Minimalpolynom μ_f das Polynom $T^2 - 1 = (T+1)(T-1)$. Da weder $f - \mathrm{Id}_V = 0$ noch $f + \mathrm{Id}_V \neq 0$ gilt, folgt sogar Gleichheit, d.h. $\mu_f = (T-1)(T+1)$. Ferner ist f trigonalisierbar da μ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Im Fall $\operatorname{char} K \neq 2$ sind jene paarweise verschieden, woraus wir die Diagonalisierbarkeit schließen. Um die Jordan-Normalform zu bestimmen, reicht es folglich die Dimension der Eigenräume zu berechnen. Definiere die Elementarmatrizen E_{ij} durch 1 an der Stelle (i, j) und sonst 0. Sie bilden eine Basis von V (nach einer Fixierung der Reihenfolge) und es gilt $f(E_{ij}) = E_{ji}$. An $(f \pm \mathrm{Id}_V)(E_{ij}) = E_{ji} \pm E_{ij}$ liest man

$$\dim V_1 = \dim \ker(f - \mathrm{Id}_V) = \dim V - \operatorname{rk}(f - \mathrm{Id}_V) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim V_{-1} = \dim \ker(f + \mathrm{Id}_V) = \dim V - \operatorname{rk}(f + \mathrm{Id}_V) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Im Fall $\operatorname{char} K = 2$ hat f nur den Eigenwert 1 und am Minimalpolynom sehen wir, dass der größte Jordanblock $J_2(1)$ ist. Die Anzahl von Blöcken dieser Größe ist

$$b_2 := \operatorname{rk}(f - \mathrm{Id}_V) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Die Anzahl von Blöcken der Größe 1 ist schließlich

$$b_1 = \dim V - 2b_2 = n^2 - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n$$

Aufgabe 2. Nach Wahl einer Basis können wir OE $V = K^n$ annehmen. Da f trigonalisierbar ist, dürfen wir sogar annehmen, dass f durch eine Jordan-Blockmatrix dargestellt wird.

Im Spezialfall $J = J_d(\lambda)$ ist J Summe einer Diagonalmatrix $D_d(\lambda) = \lambda \mathrm{Id}_{K^d}$ und einer nilpotenten Matrix N_d, welche nur auf der ersten unteren Nebendiagonalen mit 1 besetzt ist. Diese kommutieren miteinander, da

$$D_d(\lambda) \cdot N_d = \lambda \mathrm{Id}_{K^d} \cdot N_d = \lambda N_d = N_d \lambda = N_d \cdot D_d(\lambda)$$

Ist J von der allgemeinen Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

mit $d_i \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \in K$ (nicht zwangsläufig paarweise verschieden), so wählen wir Blockmatrizen

$$D = \begin{pmatrix} D_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & D_{d_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} N_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{d_s} \end{pmatrix}.$$

Dann hat D Diagonalgestalt, N ist nilpotent und es gilt

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} D_{d_1}(\lambda_1) \cdot N_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{d_d}(\lambda_s) \cdot N_{d_s} \end{pmatrix} = N \cdot D$$

Aufgabe 3. Da χ_f zerfällt ist f trigonalisierbar und besitzt daher eine Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_{i_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(\lambda_{i_s}) \end{pmatrix}$$

mit $d_j \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq r$. Bezeichne mit $b_d(\lambda)$ die Anzahl der Jordanblöcke der Größe d zum Eigenwert λ. An dem Minimalpolynom sieht man

$$b_d(\lambda_i) = 0 \text{ für } d > m_i - 1 \text{ und } b_{m_i-1}(\lambda_i) \geq 1$$

und für die algebraischen Multiplizitäten gilt

$$m_i = 1 \cdot b_1(\lambda_1) + 2 \cdot b_2(\lambda_1) + 3 \cdot b_3(\lambda_1) + \cdots$$

Also folgt

$$m_i = 1 \cdot b_1(\lambda_i) + 2 \cdot b_2(\lambda_i) + 3 \cdot b_3(\lambda_i) + \cdots + (m_i - 1) b_{m_i-1}(\lambda_i)$$

Da dies eine Summe von nicht-negativen ganzen Zahlen ist, folgt $b_{m_i-1}(\lambda_i) = 1 = b_1(\lambda_i)$ und $b_d(\lambda_1) = 0$ für $d \neq 1, m_i - 1$.

Aufgabe 4. Da A trigonalisierbar ist, können wir OE annehmen, dass A Jordan-Blockmatrix ist. Im Spezialfall $J = J_d(\lambda)$ gilt

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man die erste Matrix auf der linken Seite mit B, so gilt $B^2 = \mathrm{Id}_n$, also $B^{-1} = B$ und folglich $BJB^{-1} = J^t$. Der Fall, dass J allgemeine Jordan-Normalform hat, folgt hieraus, da sich Transposition und Inversenbildung mit Blockmatrizen verträglich ist.