Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 4

Aufgabe 1. Nein, nilpotente Matrizen bilden i.A. keine additive Gruppe (nur solche die wechselseitg kommutieren). Im Fall $\dim V = 2$ wähle eine Basis von V und definiere drei Endomorphismen, welche durch die folgenden drei Matrizen gegeben werden.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun ist einerseits die linke Matrix invertierbar (und damit nicht nilpotent), aber andererseits sind die Matrizen der rechten Seite nilpotent.

Im Fall $\dim V \geq 2$, kann man einen zweidimensionalen Unterraum $U \subset V$ wählen, auf obige Weise drei Endomorphismen auf U konstruieren, und durch Null auf V fortsetzen.

Aufgabe 2. Wir geben zwei Beweise. Erst ein langer elementarer:

Bezeichne mit $U_k \subset K^n$ den Unterraum, welcher durch $e_1, \dots, e_k$ aufgespannt wird, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des K^n bezeichne und setze $U_0 = \{0\}$.

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix mit oberer Dreiecksgestalt. Dann gelten die Inklusionen

$$A(e_k) \subset U_{k-1} + a_{kk}e_k \quad \text{und} \quad A(U_k) \subset U_k \tag{1}$$

Hat A verschwindende Diagonalelemente, so folgt hieraus $A(e_k) \subset U_{k-1}$, also $A(U_k) \subset U_{k-1}$ und damit $A^n(K^n) = A^n(U_n) \subset A^{k-1}(U_{k-1}) \subset \cdots \subset A(U_1) = \{0\}$; also ist A nilpotent.

Ist andererseits A nilpotent mit $A^m = 0$, so folgt aus der ersten Inklusion in (1) für jedes $k = 1, \dots, n$

$$0 = A^m(e_k) \subset A^{m-1}(U_{k-1} + a_{kk}e_k) \subset U_{k-1} + A^{m-1}(a_{kk}e_k) \subset U_{k-1} + (a_{kk})^m e_k,$$

dass $(a_{kk})^m e_k$ in U_{k-1} liegt, was aber nur möglich ist, falls $(a_{kk})^m = 0$ und damit $a_{kk} = 0$ erfüllt ist.

Nun zum zweiten kurzen Beweis: Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix mit oberer Dreiecksgestalt. Dann ist die Menge der Diagonalelemente gleich der Menge der Eigenwerte, also gilt

$$A \text{ nilpotent} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Spec}(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii} = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

Aufgabe 3. Bezeichne den nilpotenten Endomorphismus $U \to U$ mit f. Wir suchen eine Zerlegung $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ in zyklische Untervektoräume $U_i = \langle x_i, f(x_i), f^2(x_i), \ldots, f^{m_i-1}(x_i)\rangle$ mit $f^{m_i}(x_i) = 0$ und m_i minimal und $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$. Die Vektoren

$$x_1, f(x_1), \ldots f^{m_1-1}(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, f^{m_2-1}(x_2), \ldots, x_s, f(x_s), \ldots, f^{x_s-1}(x_1)$$

bilden dann eine Basis von U und die zugehörige Matrix von f hat dann die gesuchte Jordan-Normalform.

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}$$

Bevor wir mit der Arbeit beginnen, erinnern wir uns an das allgemeine Rezept, um zu einem nilpotenten Endomorphismus f die Größen m_j der Jordan-Blöcke zu bestimmen. Definiere b_i als die Anzahl aller m_j mit $m_j = i$, also die Anzahl aller Jordanblöcke der Grösse i. Offenbar ist $b_i = 0$ für $i > n$. Nun ist überraschenderweise die Kenntnis aller b_i zu der Kenntnis aller m_j äquivalent. Dies ist anhand des Young-tableau zu der Familie $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ einleuchtend.

Es reicht folglich die b_i zu bestimmen. Nach Vorlesung gilt die nützliche rekursive Gleichung

$$\mathrm{rk}(f^i) = 1 \cdot b_{i+1} + 2 \cdot b_{i+2} + \cdots .$$

Wegen $b_i = 0$ für $i > n$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(f^{n-1}) &= b_n \\ \mathrm{rk}(f^{n-2}) &= b_{n-1} + 2b_n \\ \mathrm{rk}(f^{n-3}) &= b_{n-2} + 2b_{n-1} + 3b_n \\ &\vdots \\ \mathrm{rk}(f^1) &= b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Gleichung

$$m_1 + \cdots + m_s = \dim U = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n \tag{3}$$

kann man schliesslich auch b_1 errechnen, sobald $b_2, \ldots, b_n$ bekannt sind.

Wenden wir uns nun dem gegeben Endomorphismus zu. Der Vektorraum U wird von den Monomen T^i, $i = 0, \ldots, 5$ aufgespannt und es gilt $f(T^i) = iT^{i-1}$. Je nach Charakteristik von $\mathbb{F}_p$ (diese ist gleich p) wird der Koeffizient hier 0. Die zu f gehörige Matrix lautet dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen der einfachen Gestalt von A lassen sich die Potenzen $A, A^2, \cdots, A^4$ leicht berechnen. Deren Ränge lauten dann je nach Charakteristik wie folgt:

	rk A	rk A^2	rk A^3	rk A^4	rk A^5
$p \geq 7$	5	4	3	2	1
$p = 5$	4	3	2	1	0
$p = 3$	4	2	0	0	0
$p = 2$	3	0	0	0	0

Daraus erhält man die b_i aus (2) und (3)

	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
$p \geq 7$	1	0	0	0	0	0
$p = 5$	0	1	0	0	0	1
$p = 3$	0	0	0	2	0	0
$p = 2$	0	0	0	0	3	0

Im Fall $p = 5$ gibt es also einen Jordanblock der Größe 6 und keine kleineren Blócke (usw. für $p = 3$ und $p = 2$) Wir erhalten also die folgenden Jordan-Normalformen:

$$
\begin{array}{ll}
p \geq 7 & J = \begin{pmatrix} J_6(0) \end{pmatrix} \\
p = 5 & J = \begin{pmatrix} J_5(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix} \\
p = 3 & J = \begin{pmatrix} J_3(0) & 0 \\ 0 & J_3(0) \end{pmatrix} \\
p = 2 & J = \begin{pmatrix} J_2(0) 0 & 0 & \\ 0 & J_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_2(0) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Die Jordan-Normalformen können wir in dieser Aufgabe aber auch durch Raten (schneller) bestimmen. Betrachten wir zuerst den Fall mit $p \geq 7$. Dann sind die iterierten Bilder von $f^k(T^5)$ die Vektoren $T^5, 5T^4, 20T^3, 60T^2, 120T, 120$ und jeder Vektor ist ungleich null. Also ist $U = \langle T^5, f(T^5), \ldots, f^5(T^5) \rangle$ zyklisch. Die Jordan-Normalform von f lautet daher

$$J = \begin{pmatrix} J_6(0) \end{pmatrix}$$

Ist $p = 5$, so gilt $f(T^5) = 0$ und $f(T^k) \neq 0$ sonst. Also ist der Unterraum $U_1 := \langle T^4, 4T^3, 12T^2, 24T, 24 \rangle$ zyklische und hat Dimension 5. Ein zweiter zklische Unterraum ist $U_2 := \langle T^5 \rangle$ und es gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und $U = U_1 + U_2$, also $U = U_1 \oplus U_2$ und die Jordan-Normalform von f ist daher

$$J = \begin{pmatrix} J_5(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix}$$

Im Fall $p = 3$ ist $f(T^3) = 0$ und $f(T^k) \neq 0$ sonst. Man rechnet dann nach, dass $U_1 := \langle T^5, 5T^4, 20T^3 \rangle$ und $U_2 := \langle T^2, 2T, 2 \rangle$ zyklische Unterräume sind mit $U = U_1 \oplus U_2$. Die Jordan-Normalform lautet dann

$$J = \begin{pmatrix} J_3(0) & 0 \\ 0 & J_3(0) \end{pmatrix}$$

Gilt letztlich $p = 2$, dann ist genau dann $f(T^k) = 0$, wenn k gerade ist. Man erhält hieraus die zyklischen Unterräume $U_1 := \langle T^5, 5T^4 \rangle$, $U_2 := \langle T^3, 3T^2 \rangle$ und $U_3 := \langle T, 1 \rangle$ mit $U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ und die Jordan-Normalform ist

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_2(0) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$$

ist genau dann nilpotent, wenn für das charakteristische Polynom gilt

$$\begin{aligned} T^2 = \chi_A(T) &= T^2 - (a+d)T + ad - bc \\ &\iff d = -a \quad \text{und} \quad a^2 + bc = 0. \end{aligned}$$

Im Fall $c \neq 0$ ist b durch $b = -a^2/c$ eindeutig bestimmt. Die Anzahl dieser Matrizen ist daher

$$\#\{(c,a) \in \mathbb{F}_p^2 | c \neq 0\} = (p-1)p.$$

Im Fall $c = 0$, d.h. A hat obere Dreieicksgestalt, ist A genau dann nilpotent, wenn $a = 0 = d$ gilt nach Aufgabe 2. Für b dürfen dann alle Werte angenommen werden, es gibt also

$$\#\mathbb{F}_p = p$$

Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $(p-1)p + p = p^2$ nilpotente Matrizen.