Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 3

Aufgabe 1. Wir geben einen langen elementaren und kurzen abstrakteren Beweis:

Die Vektoren $[x_{m+1}], \dots, [x_n]$ sind linear unabhängig, denn sobald $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ in K existieren, welche die Gleichung

$$0_{V/U} = \lambda_{m+1}[x_{m+1}] + \cdots + \lambda_n[x_n] = [\lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n]$$

erfüllen, so folgt $\lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n \in U$, d.h. es gibt $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ mit

$$\lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $x_1, \dots, x_n$ müssen also alle Koeffizienten gleich Null sein. Insbesondere $0 = \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n$.

Letztlich sind die Vektoren $[x_{m+1}], \dots, [x_n]$ auch ein Erzeugendensystem für V/U. Sei dafür ein beliebiges Element $y \in V/U$ gegeben. Wir wählen einen Repräsentanten $v \in V$. Da $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Es folgt

$$\begin{aligned} y = [v] &= [\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n] \\ &= [\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_m x_m] + [\lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n] \\ &= \lambda_{m+1}[x_{m+1}] + \cdots + \lambda_n[x_n], \end{aligned}$$

wobei der erste Summand in der vorletzten Zeile verschwindet, weil der Vektor $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ in U liegt.

Kommen wir nun zum zweiten Beweis: Definiere den Unterraum W von V als Erzeugnis aller $x_{m+1}, \dots x_n$. Dann bilden jene Vektoren eine Basis von W und es gilt $U \cap W = \{0_V\}$. Verkettet man nun die Inklusion $W \hookrightarrow V$ mit der surjektiven Quotientenabbildung $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/U$, so erhalten wir eine lineare Abbildung $\rho\colon W \to V/U$, welche einerseits injektiv ist, da $\ker \rho \subset \ker \pi = V$ und $W \cap V = \{0\}$ gilt, und andererseits auch surjektiv ist, da π surjektiv ist und $U + W = V$ gilt.

Somit ist $\rho\colon W \to V/U$ ein Isomorphismus. Nach Definition von W bilden die Vektoren $x_{m+1}, \dots, x_n$ eine Basis von W und es gilt $\rho(x_i) = \pi(x_i) = [x_i]$ für $i = m+1, \dots, n$. Da ein Isomorphism eine Basis immer auf eine Basis abbildet, sind wir fertig.

Aufgabe 2. Es gilt $\chi_A(T) = (T+1)^2(T-1)$, also sind

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1$$

die Eigenwerte mit algebraischen Multiplizitäten

$$m'_{\lambda_1} = 2 \quad \text{und} \quad m'_{\lambda_2} = 1.$$

Da für die geometrische Multiplizität m_λ eines Eigenwerts λ stehts $1 \le m_\lambda \le m'_\lambda$ gilt, folgern wir direkt

$$m_{\lambda_2} = 1.$$

Die geometrische Multiplizität m_{λ_1} ist die Dimension des Kerns der Matrix

$$\lambda_1 \operatorname{Id} - A = -\operatorname{Id} - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 \\ 11/3 & -11/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Da letztere Rang 2 hat, folgern wir

$$m_{\lambda_1} = 1$$

und somit $m'_{\lambda_1} \neq m_{\lambda_1}$. Das bedeutet, dass A nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Beachte dass für eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ stehts

$$\chi_A(T) = T^n - \operatorname{tr} A \cdot T^{n-1} + \cdots$$

gilt. Ferner ist eine $n \times n$-Matrix genau dann nilpotent, wenn ihr charakteristisches Polynom gleich T^n ist.

Hieraus folgern wir, dass für eine nilpotente Matrix A stehts $\operatorname{tr} A^2 = 0$ gelten muss, da auch A^2 nilpotent ist (Diese Richtung gilt sogar für beliebige Körper).

Sei nun angenommen, dass A triagonalisierbar ist und $\operatorname{tr} A^2 = 0$ gilt. Wir wählen eine obere Dreiecksmatrix $B = (b_{ij}) \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$, $b_{ij} = 0$ für alle $i > j$, und eine invertierbare Matrix $S \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $A = SBS^{-1}$. Also gilt auch $A^m = SBS^{-1} \cdots SBS^{-1} = SB^mS^{-1} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Aus $0 = \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} B^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} b_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kk}^2$ folgt nun, dass alle b_{kk} gleich Null sind, weil sie reell sind. Daher B hat *strikt* obere Dreiecksgestalt und ist somit nilpotent. Dann ist aber auch A nilpotent.

Aufgabe 4. Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A(T) = T^2 + T + 1 - bc$ und hat Diskriminante $\Delta = bc$.

Im Fall $\Delta = bc = 0$ hat χ_A die Wurzel $\lambda = 1$ mit algebraischer Multiplizität $m'_\lambda = 2$. Also zerfällt χ_A vollständig in Linearfaktoren und wir schliessen, dass die Frage der Diagonalisierbarkeit und Halbeinfachheit äquivalent ist. Da $b = 0$ oder $c = 0$ gelten muss, sehen (!) wir, dass A Dreieicksgestalt hat (und insbesondere triagonalisierbar ist). Im Fall $b = 0 = c$ sehen wir auch, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sogar Diagonalgestalt hat (und infolgedessen diagonalisierbar ist). Hat man nun entweder $b = 0$ oder $c = 0$, d.h. A hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

so ist die geometrische Multiplizität gleich $m_\lambda = 1$, da der Rang der Matrix $\lambda \operatorname{Id} - A$ in diesen Fällen gleich 1 ist. Wegen $m_\lambda \neq m'_\lambda$ folgern wir, dass A dann nicht diagonalisierbar ist.

Wenden wir uns nun dem Fall $\Delta = bc \neq 0$ zu. Es gilt $\chi_A(1) = -bc \neq 0$ und $\chi_A(0) = 1 - bc = \chi_A(2)$. Ist $bc = 1$, d.h. A ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

so zerfällt χ_A in Linearfaktoren. Die Eigenwerte von A sind wegen $\Delta \neq 0$ paarweise verschieden (es gilt $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$), also ist A diagonalisierbar.

Im letzten Fall $bc \neq 1$ hat A die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

und χ_A irreduzibel, also nicht triagonalisierbar (infolgedessen auch nicht diagonalisierbar). Wir zeigen, dass in diesem Fall A halbeinfach ist. Dafür benötigen wir eine Körpererweiterung $\varphi\colon \mathbb{F}_3 \hookrightarrow L$, so dass A über L diagonalisierbar ist. Diese Sprechweise ist formal nicht ganz korrekt, da i.A. $A \in \operatorname{Mat}(2, L)$ nicht gilt, weil $\mathbb{F}_3$ kein Unterkörper von L ist. Wir wissen aber, dass φ einen Isomorphismus auf den Unterkörper $\operatorname{im}\varphi$ induziert und können daher A mit $A^\varphi := (\varphi(a_{ij})) \in \operatorname{Mat}(2, L)$ identifizieren. Sicherheitshalber führen wir hier mal einen *sauberen* Beweis.

Wir definieren nun $L = \mathbb{F}_3[T]/\chi_A\mathbb{F}_3[T]$. Dies ist ein Körper, da χ_A irreduzibel ist. Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_3 \to L$, $x \mapsto [x]$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus und erlaubt uns $\mathbb{F}_3$ mit dem Unterkörper $\operatorname{im}\varphi = \{[0], [1], [2]\}$ von L identifizieren. Die Matrix A identifizieren wir dann mit der Matrix

$$A^\varphi = \begin{pmatrix} [1] & [b] \\ [c] & [1] \end{pmatrix}.$$

Das charackteristische Polynom von A^φ ist dann

$$\chi_{A^\varphi}(X) = X^2 + X + 1_L - [b][c] \in L[X].$$

Nach Konstruktion von L ist $[T]$ eine Nullstelle. Es gilt nämlich

$$\chi_{A^\varphi}([T]) = [T]^2 + [T] + [1] - [b][c] = [\chi] = 0_L.$$

Weil das Polynom χ_{A^φ} quadratisch ist, muss es also vollständig zerfallen. Man rechnet mmit Polynomdivision nach, dass auch

$$\chi_{A^\varphi}([T + 1]) = 0$$

gilt. Die Eigenwerte von A^φ sind somit paarweise verschieden (dies ergibt sich auch ohne Rechnung, wegen $\Delta \neq 0$) und wir folgern, dass A^φ diagonalisierbar ist.