Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 13

Aufgabe 1. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(T) = T^2 - (a+d)T + ad + b\bar{b},$$

und das hat Diskriminante

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad + b\bar{b}) = (a-d)^2 - 4b\bar{b}.$$

Da a, d rein imaginär, ist $(a-d)^2$ eine reelle Zahl $\leqslant 0$. Folglich ist Δ eine relle Zahl $\leqslant 0$. Gilt $\Delta < 0$ so hat $\chi_A(T)$ zwei verschiedene komplexe Wurzeln, und A ist nach Satz diagonalisierbar. Gilt $\Delta = 0$, so muss $(a-d)^2 = 0$ und $b\bar{b} = 0$ gelten, somit $a = d$ und $b = 0$, und schliesslich $c = -\bar{b} = 0$. In dem Fall ist also A bereits diagonal.

Aufgabe 2. (i) Seien $A = (\alpha_{ij})$ und $B = (\beta_{ij})$ hermitesch, also $\alpha_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}$, und entsprechendes für die β_{ij}. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt für die Einträge $\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij}$ von $A + \lambda B$:

$$\alpha_{ji} + \lambda\beta_{ji} = \bar{\alpha}_{ij} + \bar{\lambda}\bar{\beta}_{ij} = \overline{\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij}}$$

Somit ist $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine $\mathbb{R}$-Untervektorraum.

(ii) Sei $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ die Standardbasis. Wie man leicht nachrechnet, ist

$$E_{11}, \ldots, E_{nn}$$

zusammen mit

$$E_{ij} + E_{ji}, \sqrt{-1}E_{ij} - \sqrt{-1}E_{ji}, \quad i < j$$

eine $\mathbb{R}$-Basis für H. Es gilt also

$$\dim_{\mathbb{R}}(H) = n + 2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = n + 2n(n-1)/2 = n^2.$$

Aufgabe 3. Sei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ eine Orthogonalbasis, mit Eigenwerten $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\Phi(Ax_i, x_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$. Für beliebige $x = \sum \lambda_i x_i$ folgt dann

$$\Phi(Ax, x) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \Phi(Ax_i, x_j) = \sum_i \lambda_i \bar{\lambda}_i \epsilon_i \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4. (i) Die Matrix von f bezüglich der Basis $x_1, \dots, x_n$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Blatt 10, Aufgabe 4 ist dann $\chi_f(T) = T^n - 1$.

(ii) Sei $K = \mathbb{C}$. Dann sind die komplexen Zahlen $e^{2k\pi i/n}$, $k = 0, \dots, n-1$ paarweise verschiedene Wurzeln von $\chi_f(T) = T^n - 1$, das somit in Linearfaktoren zerfällt. Nach Satz ist f diagonalisierbar.

(iii) Sei $K = \mathbb{R}$ und $n \geq 3$. Dann ist die komplexe Wurzel $e^{2\pi i/n}$ keine reelle Zahl. Folglich kann $\chi_f(T) \in \mathbb{R}[T]$ nicht in Linearfaktoren zerfallen. Nach Satz ist f nicht trigonalisierbar.

(iv) Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $n = 3$. Dann zerfällt $\chi_f(T) = T^3 - 1 = (T-1)^3$ in Linearfaktoren, somit ist f trigonalisierbar. Da f nur einen Eigenwert hat und A keine Diagonalmatrix ist, kann f nicht diagonalisierbar sein.