Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 12

Aufgabe 1. (i) Symmetrisch:

$$\begin{aligned}\Phi_t(a,b) &= (1-t)\Phi_0(a,b) + t\Phi_1(a,b)\\ &= (1-t)\Phi_0(b,a) + t\Phi_1(b,a)\\ &= \Phi_t(b,a).\end{aligned}$$

Positive definit:

$$\Phi_t(a,a) = (1-t)\Phi_0(a,a) + t\Phi_1(a,a) \geq 0.$$

Gilt Gleichheit, so muss $\Phi_0(a,a)$ oder $\Phi_1(a,a)$ verschwinden, (da $1-t, t \geq 0$, und einer von beiden echt größer null sind), und deshalb $a = 0$.

(ii) analog.

Aufgabe 2. Offenbar ist V der Kern der surjektiven linearen Abbildung $\mathrm{Tr} : \mathrm{Mat}(2,K) \to K$, somit $\dim(V) = 3$. Eine Basis von V wird durch die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

geliefert. Die Matrix M von f bezüglich dieser Basis ist offenbar die Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\chi_f(T) = (T-1)(T^2-1) = (T-1)^2(T+1)$. Da es in Linearfaktoren zerfällt, ist f trigonalisierbar. Gilt $\mathrm{Char}(K) = 2$

so ist $-1 = 1$, jedoch M keine Diagonalmatrix. Nach Satz ist M nicht diagonalisierbar. Sei nun $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Offenbar bilden dann $A_1, A_2 + A_3, A_2 - A_3 \in V$ eine Basis aus Eigenvektoren, somit ist f diagonalisierbar.

Aufgabe 3. (i) Sei $x \in V^\perp$. Ist $y \in U$, so auch in V, somit $\Phi(x, y) = 0$. Folglich $x \in U^\perp$.

(ii) Da $U \subset U + V$ folgt $U^\perp \supset (U + V)^\perp$ mit (i). Ebenso folgt $V^\perp \supset (U + V)^\perp$, somit $U^\perp \cap V^\perp \supset (U + V)^\perp$. Da E endlich-dimensional, gilt $W = W^{\perp\perp}$ für jeden Untervektorraum W von E. Aus $U^\perp \cap V^\perp \subset U^\perp$ folgt

$$U = U^{\perp\perp} \subset (U^\perp \cap V^\perp)^\perp,$$

Aus Symmetriegründen gilt auch $V \subset (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$, somit $(U^\perp \cap V^\perp)^\perp \supset U + V$ und mit (i) folgt $U^\perp \cap V^\perp \subset (U + V)^\perp$.

(iii)

$$U^\perp + V^\perp = (U^\perp + V^\perp)^{\perp\perp} \overset{(ii)}{=} (U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp})^\perp = (U \cap V)^\perp$$

Aufgabe 4. Nein. Eine symmetrische Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ hat charakteristisches Polynom $\chi_A(T) = T^2 - (a + d)T + ad - b^2$, und dessen Diskriminante ist $\Delta = (a - d)^2 + 4b^2$. Werden nun $a, b, d \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $b \neq 0$ und $\Delta = 0$, so ist A keine Diagonalmatrix, und hat genau einen Eigenwert. Nach Satz ist A nicht diagonalisierbar. Offenbar erfüllen $a = 2, d = 0, b = i$ diese Bedingungen.