Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 11

Aufgabe 1. Schreibe $\chi_A(T) = T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0$. Nach Vorlesung gilt

$$\alpha_2 = -\operatorname{Tr}(A) = a + e + k,$$
$$\alpha_3 = -\det(A) = aek + bfg + cdh - gec - hfa - kdb.$$

Läßt man in der Formel für $\chi_A(T) = \det(TE - A)$ die konstanten Terme unberücksichtigt, ergibt sich, daß α_1 der Koeffizient des linearen Terms in

$$(T-a)(T-e)(T-k) - (T-a)hf - (T-e)gc - (T-k)db$$

ist, also $\alpha_1 = ek + ak + ae - hf - gc - db$.

Aufgabe 2. Es gilt

$$\chi_A(T) = T^2 - \operatorname{Tr}(A)T + \det(A) = T^2 - 3T - 7.$$

Dieses quadratische Polynom hat Diskriminante $\Delta = (-3)^2 - 4(-7) = 37$. Für $K = \mathbb{R}$ ist Δ ein Quadrat $\neq 0$. Also hat $\chi_A(T)$ zwei verschiedene Wurzeln, nach Satz ist $A \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{R})$ diagonalisierbar. Für $K = \mathbb{Q}$ ist Δ kein Quadrat, folglich ist $A \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{Q})$ nicht diagonalisierbar. Für $K = \mathbb{F}_7$ ist $\Delta = 9 = 3^2$ wiederum ein Quadrat $\neq 0$, und $A \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{F}_7)$ ist diagonalisierbar. Sei nun $K = \mathbb{F}_2$. Dann ist $\chi_A(T) = T^2 + T + 1$. Offenbar sind die Elemente $0, 1 \in \mathbb{F}_2$ keine Nullstellen sind, somit ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3. Sei $\epsilon \in \operatorname{Spec}(f)$ ein Eigenwert. Wähle einen Eigenvektor $x \in V$ dazu. Induktiv ergibt sich $f^i(x) = \epsilon^i x$ für alle $i \geq 0$. Damit erhält man

$$0 = P(f)(x) = \sum \beta_i f^i(x) = \sum \beta_i \epsilon^i x = P(\epsilon)x.$$

Da $x \neq 0$ muss $P(\epsilon) = 0$ gelten.

Aufgabe 4. Beide Aussagen sind falsch. Sei $K = \mathbb{C}$. Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

haben charakteristisches Polynom $\chi_A(T) = T^2 - bc$. Für $b, c \neq 0$ hat das zwei verschiedene Wurzeln, und A ist diagonalisierbar. Andererseits sahen wir in der Vorlesung, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar ist.